

ResearchGate

Google Scholar

ICI WORLD
of JOURNALS

НАУЧНАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ
БИБЛИОТЕКА
LIBRARY.RU



ISSN

e-ISSN(Online) 2709-1201



МЕЖДУНАРОДНЫЙ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ENDLESS LIGHT IN SCIENCE

NO 3

31 МАРТА 2025

Астана, Казахстан



lrc-els.com

МЕЖДУНАРОДНЫЙ НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ «ENDLESS LIGHT IN SCIENCE»

INTERNATIONAL SCIENTIFIC JOURNAL «ENDLESS LIGHT IN SCIENCE»



Main editor: G. Shulenbaev

Editorial colleague:

B. Kuspanova

Sh Abyhanova

International editorial board:

R. Stepanov (Russia)

T. Khushruz (Uzbekistan)

A. Azizbek (Uzbekistan)

F. Doflat (Azerbaijan)

International scientific journal «Endless Light in Science», includes reports of scientists, students, undergraduates and school teachers from different countries (Kazakhstan, Tajikistan, Azerbaijan, Russia, Uzbekistan, China, Turkey, Belarus, Kyrgyzstan, Moldova, Turkmenistan, Georgia, Bulgaria, Mongolia). The materials in the collection will be of interest to the scientific community for further integration of science and education.

Международный научный журнал «Endless Light in Science», включают доклады учёных, студентов, магистрантов и учителей школ из разных стран (Казахстан, Таджикистан, Азербайджан, Россия, Узбекистан, Китай, Турция, Беларусь, Кыргызстан, Молдавия, Туркменистан, Грузия, Болгария, Монголия). Материалы сборника будут интересны научной общественности для дальнейшей интеграции науки и образования.

31 марта 2025 г.
Астана, Казахстан

DOI 10.24412/3007-8946-2025-31-3-10

УДК 519.642.2

ИЛЛЮСТРАЦИЯ ПРЕИМУЩЕСТВА МЕТОДА ПРОГНОЗА-КОРРЕКЦИИ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ТРАПЕЦИИ

ШАФИЕВА ГЮЛЬШАН ХАЛИК кызы

Доцент кафедры Вычислительная математика БГУ, Баку, Азербайджан

ГУЛИЕВА АРЗУ МУРАД кызы

Доцент кафедры Вычислительная математика БГУ, Баку, Азербайджан

Аннотация. Существует несколько классов численных методов для решения задачи Коши в случае обыкновенных дифференциальных уравнений. Среди них наиболее известны явные и неявные методы Эйлера, метод центральных разностей и метод трапеции. Эти методы делятся на две группы: явные и неявные. Как известно, неявные методы обычно более точны. Поэтому специалисты стараются использовать неявные методы в решении задач прикладной математики. Однако, при применении неявных методов к решению конкретной задачи возникает необходимость решать нелинейное алгебраическое уравнение, что является одной из сложных задач современной математики. Чтобы устранить этот недостаток, ученые предложили использовать методы прогноза и коррекции. При этом были разработаны различные методы прогноза-коррекции, имеющие разную точность. Тем не менее, при построении таких методов возникают определенные трудности. В данной работе предлагается схема, которая иллюстрирует методы Эйлера и трапеции. Также проводится сравнение нескольких известных численных схем, предложенных разными учеными.

Ключевые слова: Задача Коши, многошаговые методы, обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) первого порядка, устойчивость и точность, методы прогноза и коррекции.

Введение. Как известно, начиная с эпохи Ньютона, ученые занимались решением различных задач астрофизики, которые описывались с помощью ОДУ. В настоящее время решение многих задач из различных областей естествознания сводится к решению начальной задачи для ОДУ высших порядков. Известно, что уравнения высших порядков можно свести к системе ОДУ первого порядка с помощью замены переменных. Таким образом, достаточно исследовать ОДУ первого порядка. Однако такой подход не всегда оправдан. Например, если решение ОДУ второго порядка, сводится к системе ОДУ первого порядка, то традиционные методы могут оказаться менее точными по сравнению с методами, специально адаптированными для решения ОДУ второго порядка. Для иллюстрации данного утверждения рассмотрим следующую задачу Коши для ОДУ первого порядка имеющую следующую форму:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad x_0 \leq x \leq X. \quad (1)$$

Предположим, что задача (1) имеет непрерывное решение, определенное на отрезке $[x_0, X]$, где имеет непрерывную производную до некоторого порядка $p+1$, включительно. А непрерывная функция по совокупности аргументов $f(x, y)$, определена в некотором замкнутом множестве G , где имеет непрерывные частные производные до некоторого порядка p , включительно. С целью нахождения численного решения задачи (1), вводятся следующие обозначения. Обозначим через $y(x_i)$ - точное значение решения задачи (1) в точке x_i , а соответствующее приближенное значение через y_i . Здесь x_i - узлы разбиения, которые определяются следующим образом: $x_{i+1} = x_i + h$ ($i = 0, 1, \dots, N-1$). Здесь h - является шагом

разбиений. Также обозначим, через f_i ($i = 0, 1, \dots, N$) приближенное значение функции $f(x, y)$ в точке x_i , а соответствующее точное значение функции $f(x, y)$ через $f(x_i, y(x_i))$ ($i = 0, 1, \dots, N$).

Численным решением задачи (1) занимались многие ученые. В их числе значительное место занимают исследования, посвященные численным методам решения задачи (1). Различные численные методы, построенные для решения данной задачи, можно разделить на несколько классов, среди которых наиболее популярными являются одношаговые и многошаговые методы с постоянными коэффициентами. Наиболее известными представителями таких методов являются явные методы типа Рунге-Кутты и методы типа Адамса. В середине XX века при решении некоторых задач возникла необходимость разработки более точных методов. В результате этого появились новые методы, такие как неявные и полужавные методы типа Рунге-Кутты, а также многошаговые (или k -шаговые) методы с постоянными коэффициентами. С учетом некоторых недостатков многошаговых методов, были разработаны многошаговые методы с забеганием вперед типа метода Коуэлла (см. например [1] - [31]).

1. О некоторых сравнениях многошаговых методов

Для иллюстрации вышеизложенного, рассмотрим следующий многошаговый метод:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^k \beta_i f_{n+i}, \quad n = 0, 1, \dots, N-k. \quad (2)$$

Этот метод был исследован многими авторами, включая Шура-Бура, Бахвалова, Дальквиста, Ибрагимова и других (см. например [32]-[61]). Дальквист определил некоторые необходимые условия, налагаемые на коэффициенты метода (2), которые можно представить в следующей форме:

А. Коэффициенты α_i, β_i ($i = 0, 1, \dots, k$) являются действительными числами, причем $\alpha_k \neq 0$.

В. Характеристические многочлены $\rho(\lambda) \equiv \sum_{i=0}^k \alpha_i \lambda^i$; $\sigma(\lambda) \equiv \sum_{i=0}^k \beta_i \lambda^i$ метода (2), не имеют общих множителей отличных от константы.

С. Выполняется следующее соотношение: $\rho(1) = 0$ и $\rho'(1) = \sigma(1)$.

Часто условие $\rho(1) = 0$ называют необходимым условием сходимости метода (2). А условие $\alpha_k \neq 0$ связано с тем, что y_{n+k} является решением алгебраического уравнения (2). Отметим, что для применения метода (2) к решению задачи (1) необходимо знание начальных значений $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$. Однако существуют различные способы вычисления значений y_j ($j = 0, 1, \dots, k-1$) так как y_0 - считается известным.

Как известно, для сравнения многошаговых методов в основном используют понятия устойчивости и степени, которые обычно определяются следующим образом:

Определения 1. Метод (2) называют устойчивым, если корни характеристического многочлена $\rho(\lambda)$ лежат внутри единичного круга, на границе которого нет кратных корней.

Определения 2. Целочисленную величину p , называют степенью метода (2), если выполняется следующее асимптотическое соотношение:

$$\sum_{i=0}^k (\alpha_i y(x+ih) - h \beta_i y'(x+ih)) = O(h^{p+1}), \quad h \rightarrow 0. \quad (3)$$

Отметим, что при определении концепции точности методов Рунге-Кутты обычно используют понятие порядка метода. Очевидно, что соотношение (2) является конечно-разностным методом и k - является его порядком. Поэтому здесь применяется понятие степени метода. С теоретической и практической точки зрения особый интерес представляют

устойчивые методы. Бахвалов доказал, что если метод (2) при $\beta_k = 0$ устойчив и имеет степень p при $k \leq 10$, то $p \leq k$. Дальквист доказал, что если метод (2) устойчив и имеет степень p , то $p \leq 2[k/2] + 2$ и для каждого k , существует устойчивый метод со степенью $p = 2[k/2] + 2$. Более того, если метод (2) при $\beta_k = 0$ устойчив, то $p \leq k$ и для каждого k , существует устойчивый метод со степенью $p = k$. Из этих результатов следует, что неявные устойчивые методы обладают высокой точностью.

Рассмотрим построение методов прогноза-коррекции.

2. Методы прогноза-коррекции со специальной структурой

Из метода (2) при $\alpha_k = 1$ можно записать, следующее

$$y_{n+k} = \sum_{i=0}^{k-1} (-\alpha_i y_{n+i} + h\beta_i f_{n+i}) + h\beta_k f(x_{n+k}, y_{n+k}). \quad (4)$$

Очевидно, что этот метод является явным при $\beta_k = 0$, а в противном случае неявным. Обычно методы прогноза-коррекции для многошаговых методов строятся в следующей форме (см. [48]):

$$\hat{y}_{n+k} = \sum_{i=0}^{k-1} (-\alpha_i y_{n+i} + h\beta_i f_{n+i}), \quad (5)$$

$$y_{n+k} = \sum_{i=0}^k (-\alpha_i y_{n+i} + h\beta_i f_{n+i}) + h\beta_k f(x_{n+k}, \hat{y}_{n+k}). \quad (6)$$

С учетом вышеизложенного получаем, что степень метода p , достигает максимального значения для четных k . Сначала рассмотрим случай $k = 1$, т.е. когда k - нечетное число. В этом случае $p_{\max} = 2$ и этот метод сводится к методу трапеции, который имеет следующий вид:

$$y_{n+1} = y_n + h(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}))/2, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (7)$$

Этот метод является неявным. Однако, с помощью явного метода Эйлера, метод (7) можно записать в следующей форме:

$$y_{n+1} = y_n + h(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n)))/2. \quad (8)$$

Описанную схему с помощью метода прогноза-коррекции можно представить в следующей форме:

$$\hat{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (9)$$

$$y_{n+1} = y_n + h(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \hat{y}_{n+1}))/2. \quad (10)$$

Метод (9) и (10) является методом **прогноза-коррекции**.

Отметим, что для сохранения точности метода коррекции, разность между значениями степеней методов прогноза и коррекции должна равняться единице (см. [48]). Метод, составленный из явного метода Эйлера и метода трапеции, удовлетворяет выше описанному правилу. Поэтому такой метод, успешно применяется для решения многих прикладных задач. Если k - четное число, то при построении метода прогноза-коррекции возникают некоторые трудности. Для иллюстрации данного факта, рассмотрим применение метода Симпсона, который имеет следующий вид:

$$y_{n+2} = y_n + h(f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n)/3, \quad n = 0, 1, \dots, N-2. \quad (11)$$

Этот метод является устойчивым и имеет степень $p = 4$. Согласно результатам Дальквиста при $k = 2$, метод (2) достигает максимальной точности $p = 4$, которая совпадает с точностью метода Симпсона. Однако метод прогноза в данном случае обладает максимальной точностью $p_{\max} = 2$, и может быть записан в виде:

$$\hat{y}_{n+2} = y_n + 2hf_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, N-2. \quad (12)$$

С учетом метода прогноза (12), метод коррекции можно записать в следующей форме:

$$y_{n+2} = y_n + h(f(x_{n+2}, \hat{y}_{n+2}) + 4f_{n+1} + f_n)/3, \quad n = 0, 1, \dots, N-2. \quad (13)$$

Отметим, что при применении методов (12) и (13) возникает вопрос о нахождении значений y_1 . С этой целью можно применить метод (9). Однако точность метода (13) будет меньше, чем у метода (11). Поэтому, заменяя y_{n+2} - вычисленное по методу (13) через $\bar{y}_{n+2}$ имеем:

$$y_{n+2} = y_n + h(f(x_{n+2}, \bar{y}_{n+2}) + 4f(x_{n+1}, y_{n+1}) + f(x_n, y_n))/3, \quad n = 0, 1, \dots, N-2. \quad (14)$$

Здесь, предлагаем использовать аналогичную схему для метода трапеции, который можно представить в следующей форме:

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + h(f(x_{n+1}, \hat{y}_{n+1}) + f(x_n, y_n))/2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (15)$$

$$y_{n+1} = y_n + h(f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}) + f(x_n, y_n))/2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (16)$$

Отметим, что методы (10) и (16) получены из метода трапеции, но они не совпадают. Результаты, полученные с помощью метода (16) являются более точными, чем результаты, полученные методом (10). Чтобы получить еще более точные результаты, специалисты предлагают в методе (2) заменить шаг h на $h/2$. В этом случае, метод Симпсона будет иметь следующую форму:

$$y_{n+1} = y_n + h(f_{n+1} + 4f_{n+1/2} + f_n)/6, \quad n = 0, 1, \dots, N-2.$$

Однако при использовании данного метода возникают некоторые трудности, связанные с вычислением значений $y_{n+1/2}$ с требуемой точностью. Таким образом, можно сделать вывод, что каждый метод имеет свои преимущества и недостатки. Подобные исследования, направленные на решение интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, проводились многими авторами (см. например [62]- [75]).

Выводы. Как известно, одним из ключевых вопросов при решении прикладных задач является оценка достоверности полученных результатов. Одним из простых способов определения достоверности полученных результатов заключается в сравнении значений, полученных с помощью формул прогноза и коррекции, при различных значениях шага h . Отметим, что для повышения точности вычисленных значений по многошаговым или одношаговым методам часто применяются экстраполяции Рундсона. Однако, с этой целью, можно также использовать метод Хемминга или линейную комбинацию вычисленных значений искомых решений, полученных разными многошаговыми или одношаговыми методами. Очевидно, что каждый из выше перечисленных методов обладает некоторыми преимуществами. Как было показано выше, методы предложенные, в данной работе обладают простотой, что делает их удобными для применения при решении различных задач. Некоторые авторы, при построения подобных методов, использовали методы с дробными шагами (см. [55]). Однако при их использовании возникают определенные трудности, связанные с вычислением значений типа $y_{n+\alpha}$, где $|\alpha| < 1$. Исходя из выше изложенного, можно сделать вывод, что применение методов типа прогноза-коррекции, является предпочтительным подходом для решения задач численного интегрирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dahlquist G., Convergence and stability in the numerical integration of ODEs, Math., Scand., 1956, no4, p. 33-53.
2. Skvortsov L., Explicit two-step Runge-Kutta methods, Math. modeling 21, 2009, p. 54-65.
3. Shura-Bura M.R., Error estimates for numerical integration of ordinary differential equations, Prikl. matem. and mech., 1952, № 5, p. 575-588, (Russian).

4. Bakhvalov N.S., Some remarks on the question of numerical interfraction of differential equation by the finit - difference method, Academy of Science report, USSA, N3, 1955, p. 805-808 (Russian).
5. Mehdiyeva G., Ibrahimov V., Imanova M., General theory of the application of multistep methods to calculation of the energy of signals, Wireless Communications, Networking and Applications: Proceedings of WCNA 2016, Springer India, p.1047-1056.
6. Davron A. Juraev, The Solution Of The Ill-Posed Cauchy Problem For Matrix Factorizations Of The Helmholtz Equation In A Multidimensional Bounded, Palestine Journal of Mathematics, Vol. 11(3)(2022) , p.604–613.
7. Dahlquist G., Stability and error bounds in the numerical integration of ordinary differential equation. Trans. Of the Royal Inst. Of Techno. Stockholm, Sweden, No. 130, 1959, p. 3-87.
8. Urabe M., An implicit one-step Method of High-Order Accuracy dor the Numerical Integrations of ODE. Numer. Math. 1970, 2, 151–164.
9. Mehdiyeva G., Imanova M., Ibrahimov V., An application of mathematical methods for solving of scientific problems, British Journal of Applied Science & Technology, 2016, p. 1-14.
10. Butcher J.C., A modified multistep method for the numerical integration of ordinary differential equations. J. Assoc. Comput. Math. 1965, 12, 124–135.
11. Davron Aslonqulovich Juraev, Mahir Jalal Oglu Jalalov, Vagif Rza Oglu Ibrahimov, On the formulation of the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation, Engineering Applications, 2023/5/26, p. 176-189.
12. Mehdiyeva G., Ibrahimov V., Imanova M., On a way for constructing numerical methods on the joint of multistep and hybrid methods, World Academy of Science, engineering and Technology, Paris, 2011, p. 240-243.
13. Liu Jie, Deng Ya, Identification of Stuck intervals in Imaging Logging Base on Acceleration, 2021 4 th inter.conf.on E-Business, infor Management and Computer Sciences,2021, p. 203-209.
14. Ibrahimov V., Qurbanov I., Shafiyeva G., Quliyeva A., Rahimova K., On Some Ways For Calculation Definite Integrals, *Slovak international scientific journal*, vol. 79, p. 27-32, 2017.
15. Mehdiyeva G.Yu., Ibrahimov V., Imanova M., An application of the hybrid methods to the numerical solution of ordinary diffrential equations of second order, Kazakh National University named after Al-Farabi, Journal of treasury series, mathematics, mechanics, computer science, Almaty, tom 75, No-4, 2012, p. 46-54.
16. Mehdiyeva G.Y., Imanova M.N., Ibrahimov V.R., A way to construct an algorithm that uses hybrid methods, Applied Mathematical Sciences, 2013, p. 4875-4890.
17. Akinfewa O.A., Yao N.M., Jator S.N., Implicit two step continuous hybrid block methods with four off steps points for solving stiff ordinary differential equation, WASET, 51, 2011, p.425-428.
18. Trifunov, Z. Definite Integral For Calculating Volume of Revolution That is Generated By Revolving The Region About The X(Y)-Axis And Thei Visualization. Educ. Altern. 2020, 18, 178–186.
19. Abdulganiy R.I., Akinfenwa O.A., Okunuga S.A. Simpson type trigonometrically fitted block scheme for numerical integration of oscillatory problems, UJMST, 5 (2017), 25-36.
20. Mehdiyeva G.Yu., Ibrahimov V.R., Imanova M.N., On a calculation of definite integrals by using of the calculation of indefinite integrals, SN Applied Sciences, 2019, p.1-8.
21. Gupta G.K., A polynomial representation of hybrid methods for solving ordinary differential equations. Math. Comput. 1979, 33, 1251–1256.
22. Ibrahimov Vagif, Imanova Mehriban, About One Multistep Multiderivative Method of Predictor-Corrector Type Constructed for Solving Initial-Value Problem for ODE of Second Order, WSEAS Transactions on Mathematics, E-ISSN:224-2880, 2024, p.599-607.
23. Ibrahimov Vagif, Imanova Mehriban, On Some Ways to Increase the Exactness of the Calculating Values of the Required Solutions for Some Mathematical Problems, WSEAS Transactions on Mathematics, 2024, p.430-437.

24. Ibrahimov Vagif, Mehdiyeva Galina, Shafiyeva Gulshan, Quliyeva Arzu, Rahimova Kamala, Qurbanov Isabal, Farzaliyeva Gunel, On Some Ways for Application of Hybrid Methods to solve ODEs of the First Order, Journal of Harbin Engineering University, Vol. 44 No. 12 (2023): Issue 12, p. 1-8.
25. Tie Fang, Chenglian Liu, Chich-Wen Hsu, Theodore E.Simos, Charalampos Tsitouras, Explicit hybrid six-step, six order, fully symmetric methods for solving , Mathematical Methods in the applied Sciences, June 2019, p.1-10.
26. Imanova M.N., Ibrahimov V.R., The application of hybrid methods to solve some problems of mathematical biology, American Journal of Biomedical Science and Research, DOI: 10.34297 /AJBSR, No-18, 2023/6, p. 74-80.
27. Simos T.E., Tsitouras C., Fitted modifications of classical Runge-Kutta pairs of orders 5(4). Math. Meth Appl Sci. 2018; 41:4549-4559.
28. Ibrahimov V.R., Relationship between of the order and the degree for a stable forward-jumping formula, Prib. operator methods. urav. Baku 1984, p. 55-63.
29. Davron Juraev, Vagif Ibrahimov, Praveen Agarwal, Regularization Of The Cauchy Problem For Matrix Factorizations Of The Helmholtz Equation On A Two-Dimensional Bounded Domain, Palestine Journal of Mathematics, 2023, p. 381-402.
30. Mehdiyeva G.Y., Imanova M.N., Ibrahimov V.R., On a research of hybrid methods, Numerical Analysis and Its Applications Springer, p. 395-402.
31. Ibrahimov Vagif, Imanova Mehriban, The New Way To Solve Phsical Problems Described By ODE Of The Second Order With The Special Structure, WSEAS TRANSACTION ON SYSTEMS, 2023, p. 199-206.
32. Mehdiyeva G.Yu., Ibrahimov V.R., Imanova M.N., Application of a second derivative multi-step method to numerical solution of Volterra integral equation of second kind, Pakistan Journal of Statistics and Operation Research, 28.03.2012, p.245-258, <https://doi.org/10.1007/s42452-019-1519-8>.
33. Mehdiyeva, G.Yu., Ibrahimov V.R., Imanova M.N., On an application of the finite-difference method, News BSU,(2), 2008, p. 73-78.
34. Simos T.E. Optimizing a hybrid two-step method for the numerical solution of the Schrödinger equation and related problems with respect to phase-lag. J.Appl.Math. 2012;2012;17 pages, Article ID 420387, <https://doi.org/10.1155/2012/420387>.
35. Mehdiyeva, G.Yu., Ibrahimov V.R., Imanova M.N., On a research of symmetric equations of Volterra type, Int. J. Math. Models Methods Appl. Sci, 2014, p. 434-440.
36. Anastassi Z.A. and Simos T.E. An optimized Runge-Kutta method for the solution of orbital problems, Journal of Computational and Applied Mathematics 175(1) 1-9(2005).
37. Ibrahimov Vagif, Mehdiyeva Galina, Imanova Mehriban, Juraev Davron, Application of the Bilateral Hybrid Methods to solving initial-value problems for the Volterra integro-differential equations, WSEAS TRANSACTION ON MATHEMATICS,2023, p. 781-791.
38. Ehigie I.O., Okunuga S.A., Sofoluwe A.B., Akopov M.A., On generalized 2-step continuous linear multistep, method of hybrid type for the integration of second order ODEs, Archives of Applied Research, 2 (6), 2010, p.362-372.
39. Ibrahimov Vagif, Imanova Mehriban, On Some Modifications Of The Gauss Quadrature Method And Its Application To Solve Of The Initial-Value Problem For ODE, WCNA 2022: Proceeding of 2022 International Conference on Wireless Communications, Networking and Applications (WCNA 2022), 2023, p.306-316.
40. Burova I.G., Application local polynominal and non-polynominal splines of the third order of approximation for the construction of the numerical solution of the Volterra integral, WSEAS Transactions on Mathematics, 2021.
41. Burova I.G., Alcybeev G.O., Solution of Integral Equations Using Local Splines of the Second Order, WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics, Volume 17, 2022, p. 258-262.

42. Шафиева Г.Х., О некоторых преимуществах многошаговых методов типа гибридных, Международный научно-практический журнал «ENDLESS LIGHT IN SCIENCE», Алматы, Казахстан, 2023, р. 380-388.
43. Shafieva G.Kh., Ibrahimov V.R., Juraev D.A., On some comparison of Adams methods with multistep methods and application them to solve initial – value problem for the ODEs first order, Karshi Multidisciplinary International Scientific Journal, vol. 1(2), 2024, p. 69-78.
44. Mehdiyeva G., Ibrahimov V., Imanova M., Shafiyeva G., A Way to Construct a Hybrid Forward-Jumping Method IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 225 (2017).
45. Juraev Davron, Shokri Ali, Marian Daniela, On an Approximate Solution of the Cauchy Problem for Systems of Equations of Elliptic Type of the First Order, MDPI Open Access Journals, 2022, p.1-8.
46. Ибрагимов В.Р., Шафиева Г.Х., О Некоторых Применениях Метода Прогноза-Коррекции, ОФ Международный научно-исследовательский центр “Endless Light in Science”, Международный научно-практический журнал “Endless Light in Science”, 2023, 284-290.
47. Ibrahimov V.R., On a relation between order and degree for stable forward jumping formula, Zh. Vychis. Mat 7, 1990, 1045-1056.
48. Ibrahimov V.R., Convergence of predictor-corrector method, Godishnik na visshite uchebni zavedeniya, Prilozhno math., Sofiya, Bulgariya, 1984.
49. Mehdiyeva G.Yu., Ibrahimov V.R., Imanova, M.N. On the construction test equations and its Applying to solving Volterra integral equation, Methematical methods for information science and economics, Montreux, Switzerland, 2012/12/29, p. 109-114, <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1979-0537968-6>.
50. Ibrahimov V. and Imanova M., “Multistep methods of the hybrid type and their application to solve the second kind Volterra integral equation,” Symmetry, vol. 13, no. 6, pp. 1-23, 2021, <https://doi.org/10.3390/sym13061087>.
51. Brunner H., Implicit Runge-Kutta Methods of Optimal Order of Volterra Integro-Differential Equations. Math. Comput. 1984, 42, 95–109.
52. Mehdiyeva G.Yu., Ibrahimov V., Imanova M., Application of the hybrid method with constant coefficients to solving the integro-differential equations of first order, AIP Conference Proceedings, 2012/11/6, p. 506-510.
53. Brunner H., Iterated collocation methods and their discretizations for Volterra integral equations of second kind. SIAM J. Numer. Anal. 1984, 21, 1132–1145.
54. Mehdiyeva G.Yu., Ibrahimov V.R., Imanova M.N., Some refinement of the notion of symmetry for the Volterra integral equations and the construction of symmetrical methods to solve them, journal of Computational and Applied Mathematics, 2016/11/1, p. 1-9.
55. Яненко Н.Н., Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Наука, Новосибирск, (1967).
56. Mehdiyeva G.Yu., Ibrahimov V.R., Imanova M.N., On One Application of Hybrid Methods For Solving Volterra Integral Equations, World Academy of Science, Engineering and Technology 61 2012, p. 809-813.
57. Liu Jie, Deng Ya, Identification of Stuck intervals in Imaging Logging Base on Acceleration, 2021 4 th inter. conf. on E-Business, infor. Management and Computer Sciences, 2021, p. 203-209.
58. Kai P., Manta O., Folcut B., Yue X.G., Research on China’s New Infrastructure Measurement Base on Perpetual Inventory Method, Proceedings of the 7.th International Conference on intelligent Information Processing, 2022, p.1-6.
59. Ibrahimov V.R., Imanova M.N., On a research of symmetric equations of Volterra type, Int. J. Math. Models Methods Appl. Sci 8, 2014, 434-440.
60. Mehdiyeva G., Imanova M., Ibrahimov V., General hybrid method in the numerical solution for ODE of first and second order, International Conference on Applied Mathematics and Computational Methods, 2013

61. Ibrahimov V.R., Imanova M.N., Finite difference methods with improved properties and their application to solving some model problems, 2022 International Conference on Computational Science and Computational, 2023
62. Deepa S., Ganesh A., Ibrahimov V., Santra S.S., Govindan V., Khedher K.M., Fractional fourier transform to stability analysis of fractional differential equations with prabhakar derivatives, Azerbaijan Journal of Mathematics 12 (2), 2022, 1-23.
63. Шафиева Г.Х., Гулиева А.М., О некоторых способах построения двусторонних многошаговых методов с постоянными коэффициентами, Международный научно-практический журнал «ENDLESS LIGHT IN SCIENCE», Алматы, Казахстан, 2024, р. 37-45.
64. Гулиева А.М., Шафиева Г.Х. О сравнении некоторых численных методов предназначенных для решения интегральных уравнений типа Вольтерра, Международный научный журнал «IN THE WORLD OF SCIENCE AND EDUCATION», Алматы, Казахстан, 2025, р. 35-42.
65. Bulatov M.V., Ming-Gong Lee, Application of matrix polynomials to the analysis of linear differential-algebraic equations of higher order, Differential Equations, vol. 44, 2008, p. 1353–1360.
66. Bulatov M., Indutskaya T., Solovarova L., On an algorithm for the numerical solution of quasilinear integral-algebraic equations, applied Numerical Mathematics, oct. 2024.
67. Bulatov M., Marlova E.V., Collocation Variational Approaches to the Solution to Volterra Integral Equations of the First Kind, Computational Mathematics and Mathematical Physics, Feb 2022.
68. Botoroeva M.N., Budnikova O.S., Bulatov M., Orlov S.S., Numerical Solution of Integral-Algebraic Equations with a Weak Boundary Singularity by k-step Methods, Computational Mathematics and Mathematical Physics, Nov 2021.
69. Imtiyaz Ahmad Bhat, Lakshmi Narayan Mishra, Numerical Solutions of Volterra Integral Equations of Third Kind and Its Convergence Analysis, Symmetry, 2022, p. 1-18.
70. Xiao Guang, Zeying Zhang, Arzu Akbulut, Mohammed K.A. Kaabar, Melike Kaplan, A new computational approach to the fractional-order Liouville equation arising from mechanics of water waves and meteorological forecasts, Journal of Ocean Engineering and Science, 12 April 2022, p. 1-8.
71. Mehdiyeva G.Yu., Ibrahimov V.R., Imanova M.N., On the construction of the advanced Hybrid Methods and application to solving Volterra Integral Equation, WSEAS Transactions on Systems and Control, 2019, p.183-189.
72. Kai P., Manta O., Folcut B., Yue X.G., Research on China's New Infrastructure Measurement Base on Perpetual Inventory Method, Proceedings of the 7.th International Conference on intelligent Information Processing, 2022, p.1-6.
73. Mehdiyeva G., Ibrahimov V., Imanova M., On the construction of the multistep methods to solving the initial-value problem for ODE and the Volterra integro-differential equations, IAPE, Oxford, United Kingdom, 2019, p. 1-9.
74. Mehdiyeva G.Y., Imanova M.N., Ibrahimov V.R., The application of the hybrid method to solving the Volterra integro-differential equation, World Congress on Engineering 2013, London, U.K., 3-5 July, p.186-190.
75. Mehdiyeva G.Y., Imanova M.N., Ibrahimov V.R., Solving Volterra integro-differential equation by the second derivative methods, Applied Mathematics & Information Sciences, 2015/9/1, p. 2521

DOI 10.24412/3007-8946-2025-31-11-14

ӘОЖ: 512.81

АЛГЕБРА КУРСЫНДА ТЕҢДЕУЛЕР МЕН ТЕҢСІЗДІКТЕРДІ ШЕШУДЕ СТАНДАРТТЫ ЕМЕС ТӘСІЛДЕРДІ ҚОЛДАНУДЫҢ ОҚУШЫЛАРДЫҢ БІЛІМІН ТЕРЕҢДЕТУДЕГІ РӨЛІ

МАЖИТОВА НАРГИЗА СЕЙТЖАНОВНА

Абай атындағы ҚазҰПУ, Алматы, Қазақстан

Математика, физика және информатика институты, математика мұғалімдерін даярлау
Магистрант

Ғылыми жетекшісі: ЕРКИШЕВА Ж. С.

Аңдатпа: Алгебра курсында теңдеулер мен теңсіздіктерді шешуде стандартты емес тәсілдерді қолдану оқушылардың математикалық білімін тереңдетудің маңызды құралы болып табылады. Бұл мақалада стандартты емес әдістерді енгізу арқылы оқушылардың математикалық ойлау қабілетін дамыту, логикалық пайымдау дағдыларын жетілдіру және олардың пәнге деген қызығушылығын арттыру жолдары қарастырылады. Сонымен қатар, тригонометриялық теңсіздіктерді шешуде геометриялық интерпретациялар, функционалдық тәсілдер және графиктік әдістердің тиімділігі талданады.

Инновациялық технологияларды пайдалану, соның ішінде GeoGebra, Desmos сияқты интерактивті платформалар мен онлайн-ресурстарды қолдану оқушылардың материалды терең түсінуіне ықпал етеді. Сондай-ақ, геймификация элементтері мен виртуалды зертханалардың оқыту процесіне енгізілуі оқушылардың мотивациясын арттыруға және олардың математикалық моделдеуге деген қызығушылығын оятуға мүмкіндік береді. Мақалада стандартты емес тәсілдердің практикалық қолданыстары нақты мысалдармен көрсетілген, соның ішінде графикалық әдістер, параметрлерді қолдану және эквивалентті түрлендірулер қарастырылады. Сонымен қатар, математиканың заманауи технологиялар мен ғылымдағы қолданылу аспектілері көрсетіліп, оның өмірлік маңыздылығы туралы түсінік беріледі.

Кілт сөздер: теңдеулер, теңсіздіктер, стандартты емес тәсілдер, инновациялық технологиялар, тригонометриялық теңсіздіктер, графиктік тәсілдер, функционалдық тәсілдер, математикалық ойындар, виртуалды шындық.

Теңдеулер мен теңсіздіктер орта мектептің математика курсының негізгі мазмұны болып табылады. Оқушылар теңсіздіктер мен теңдеулермен бастауыш сыныптан бастап танысады. «Теңдеулер» және «Теңсіздіктер» тақырыптарының мазмұны бірте-бірте тереңдетіліп, кеңейтіледі. Мұғалімнің міндеті – оқушыларды стандартты теңдеулер мен теңсіздіктерді, сондай-ақ алгоритмдер бойынша шешілмейтін стандартты емес теңдеулер мен теңсіздіктерді тиімді шешуге үйрету. Мұндай теңдеулер мен теңсіздіктер шешуге әртүрлі тәсілдерді талап етеді.

Күрделі және шешуге стандартты емес тәсілді қажет ететін теңдеулер, теңсіздіктер және олардың жүйелері ҰБТ, олимпиадалардың мазмұнына кіреді. Мектепте математика курсының ең қиын бөлімдерінің бірі тек аз ғана факультативтік сабақтарда немесе элективті курстарда қарастырылады.

Алгебра курсында теңдеулер мен теңсіздіктерді шешуде стандартты емес тәсілдерді қолдану оқушылардың білімін тереңдетуде маңызды. Осыған байланысты, инновациялық технологиялардың оқыту процесіне енгізілуі оқушылардың математикалық ойлауын дамытуға, олардың қызығушылығын арттыруға және білім сапасын жақсартуға мүмкіндік береді. Тригонометриялық теңсіздіктерді шешу математикада ерекше орын алады. Көптеген

стандартты әдістер белгілі болғанымен, оларды шешуде стандартты емес тәсілдерді қолдану маңызды [1].

Геометриялық интерпретациялар, функционалдық тәсілдер және басқа да амалдар оқушылардың логикалық ойлау қабілетін дамытуға көмектеседі. Геометриялық тәсілдер математикалық интуицияны арттырып, күрделі теңсіздіктерді шешуде тиімді құрал бола алады. Мысалы, шеңбер мен тригонометриялық функциялардың графиктері арқылы теңсіздіктердің шешімдерін табу әдісі жиі қолданылады. Функционалдық тәсілдер арқылы тригонометриялық теңсіздіктердің шешімдерін зерттеу кеңінен қолданылады. Бұл тәсілде тригонометриялық функциялардың қасиеттері, симметриясы және периодтылығы қарастырылады [2]. Сонымен қатар, тригонометриялық теңсіздіктерді шешуде функциялардың монотондығы маңызды рөл атқарады.

Тригонометриялық теңсіздіктерді шешудің стандартты емес тәсілдері оқушылардың шығармашылық қабілеттерін арттырып, логикалық ойлау дағдыларын жетілдіруге көмектеседі. Осындай әдістерді қолдану арқылы оқушылар математикалық интуицияларын дамытып, зерттеу дағдыларын қалыптастырады [3].

Стандартты емес есептерді шешуге арналған компьютерлік бағдарламалар мен онлайн-ресурстарды ұсынамыз. Соның ішінде GeoGebra, Desmos сияқты интерактивті платформалар оқушыларға теңдеулер мен теңсіздіктердің графиктерін салуға, параметрлерді өзгертуге және нәтижелерді визуализациялауға мүмкіндік береді. Бұл оқушыларға абстрактілі ұғымдарды нақты көруге және түсінуге көмектеседі. Khan Academy, Wolfram Alpha сияқты онлайн-ресурстар оқушыларға стандартты емес есептерді шешу дағдыларын дамытуға арналған интерактивті жаттығулар мен тренажерлерді ұсынады. Виртуалды қосымшалар оқушыларға математикалық модельдерді құруға және оларды әртүрлі параметрлерде зерттеуге мүмкіндік береді. Бұл оқушылардың зерттеушілік дағдыларын дамытуға және олардың математикалық интуициясын қалыптастыруға көмектеседі [4].

Геймификация элементтерін (ұпайлар, жетістіктер, рейтингтер) оқу процесіне енгізу оқушылардың мотивациясын арттырады және олардың стандартты емес есептерді шешуге деген қызығушылығын оятады.

Виртуалды шындық (VR) және кеңейтілген шындық (AR): VR және AR технологиялары оқушыларға математикалық ұғымдарды интерактивті және қызықты түрде зерттеуге мүмкіндік береді. Мысалы, VR арқылы оқушылар үш өлшемді кеңістікте геометриялық фигураларды зерттей алады, ал AR арқылы олар нақты әлемде математикалық модельдерді визуализациялай алады.

Математикалық ойындар оқушылардың логикалық ойлауын, проблемаларды шешу қабілетін және математикалық интуициясын дамытуға көмектеседі [5]. Мысалы, "Математикалық лабиринттер", "Логикалық пазлдар" және "Математикалық стратегиялар" сияқты ойындар оқушылардың қызығушылығын арттырады және олардың математикалық дағдыларын дамытуға ықпал етеді.

Инновациялық технологияларды қолдану оқушылардың стандартты емес есептерді шешу дағдыларын дамытуға, олардың математикаға деген қызығушылығын арттыруға және білім сапасын жақсартуға мүмкіндік береді. Бұл оқушылардың болашақта табысты болуына және олардың математикалық әлеуетін толық ашуға көмектеседі.

Алдыңғы бөлімде біз стандартты емес тәсілдердің теориялық аспектілерін қарастырдық. Енді осы тәсілдердің практикалық қолданысын нақты мысалдар арқылы көрсетейік.

Графиктік тәсілдер арқылы теңсіздіктердің шешімдерін қарастыру – көрнекі әдістердің бірі болып табылады. Бұл тәсілде тригонометриялық функциялардың графиктерін салу және олардың қиылысу нүктелерін анықтау арқылы шешімдерді табуға болады.

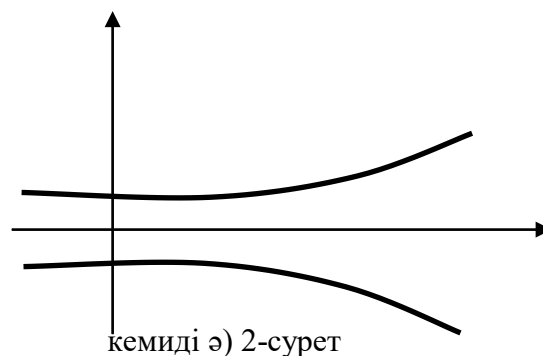
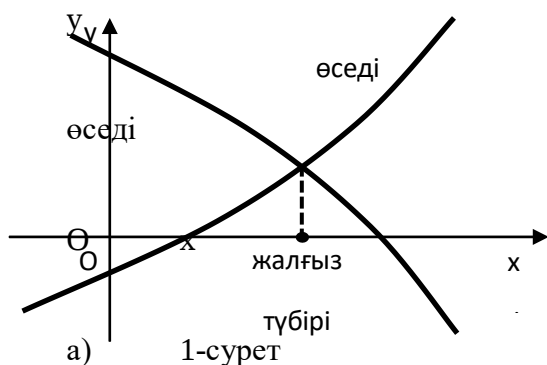
$|x - 1| + |x - 3| = 4$ теңдеуін шешу.

$y = |x - 1|$ және $y = |x - 3|$ функцияларының графиктерін саламыз.

$y = |x - 1|$ графигі $x = 1$ нүктесінде, ал $y = |x - 3|$ графигі $x = 3$ нүктесінде V-тәрізді болады. Осы екі графикті қосып, $y = |x - 1| + |x - 3|$ графигін саламыз.

$y=4$ түзуін саламыз. Екі графиктің қиылысу нүктелерін табамыз: $x=0$ және $x=4$. Жауабы: $x=0$, $x=4$.

Келесі есепте $f(x) = g(x)$ теңдеуін **функционалды-графиктік әдісінен** шешуді қарастырамыз. $y=f(x)$ және $y=g(x)$ функцияларының графиктері салып, графиктер қиылысса, қиылысу нүктесін табамыз. Графиктердің қиылысу нүктесінің абсиссасы теңдеудің түбірі болады. $y=f(x)$ және $y=g(x)$ функцияларының графиктері қиылыспаса теңдеудің шешімі жоқ. Бұл әдіс теңдеудің түбірлерінің санын және теңдеудің түбірлерін дәл немесе жуықтап анықтауға мүмкіндік береді [6]. Егер X аралығында $y=f(x)$ және $y=g(x)$ функцияларының бірі өсетін, ал екіншісі кемитін болса, онда $f(x) = g(x)$ теңдеуінің осы аралықта жалғыз түбірі болады (1,а-сурет) немесе ешбір түбірі болмайды (1,ә-сурет).



Параметрлерді қолдану әдісі бойынша $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$ теңдеуін қарастырсақ, шешімдерін a параметрінің мәндеріне байланысты зерттейміз. Дискриминантты есептейміз: $D = (-2a)^2 - 4(a^2 - 1) = 4a^2 - 4a^2 + 4 = 4$. Дискриминант оң, сондықтан теңдеудің екі шешімі бар. Шешімдерді табамыз: $x = (2a \pm \sqrt{4}) / 2 = a \pm 1$. Жауабы: $x = a + 1$, $x = a - 1$.

Логикалық пайымдауларға негізделген тәсілдерді де үйретіп өту қажет. Мысалы, $x^2 + y^2 = 0$ теңдеуінің шешімін табу.

Шешімі: $x^2 \geq 0$ және $y^2 \geq 0$.

Сондықтан, $x^2 + y^2 = 0$ тек $x = 0$ және $y = 0$ болғанда орындалады.

Жауабы: $x = 0$, $y = 0$.

Әдістерді араластырып қолдану әдісі бойынша $|x - 1| + \sqrt{x - 2} = 3$ теңдеуін шешуді қарастырайық, біріншіден түбірден арылу үшін $\sqrt{x-2}=3-|x-1|$ екі жағын да квадраттаймыз.

$$x-2=9-6|x-1|+x^2-2x+1.$$

$$x^2-3x+12-6|x-1|=0.$$

бұл теңдеуді шешу үшін графикалық және аналитикалық тәсілдерді араластырамыз, графикті салып, $x=3$ шешімін аламыз.

Теңдеулерді шешу барысында әртүрлі амалдар қолданылып, бастапқы теңдеуді қарапайым түрге келтіруге болады. Алайда, түрлендірулер нәтижесінде алынған соңғы теңдеудің шешімі әрқашан бастапқы теңдеудің шешімі бола бермейді. Бұл мәселе "эквивалентті теңдеулер" ұғымымен тығыз байланысты. Оқушылар эквивалентті теңдеулердің анықтамасын, эквивалентті түрлендірулерді, эквивалентті емес түрлендірулердің себептерін және оларды анықтау жолдарын терең түсінуі қажет [7].

Оқушылардың математикаға деген қызығушылығын арттыру және олардың математикалық ойлауын дамыту үшін біз теңдеулер мен теңсіздіктердің тек мектеп бағдарламасындағы қолданысын ғана емес, олардың заманауи технологиялардағы және ғылымдағы маңызды рөлін де көрсетуіміз керек. Мысалы, криптография және қауіпсіздік саласында күрделі теңдеулер мен теңсіздіктер деректерді шифрлау және дешифрлау үшін қолданылады. Компьютерлік графика және ойындарда 3D графикасында объектілерді жылжыту, айналдыру және масштабтау үшін матрицалық теңдеулер қолданылады. Робототехника және жасанды интеллектте роботтардың қозғалысын басқару және олардың қоршаған ортамен әрекеттесуін модельдеу үшін дифференциалдық теңдеулер және

оңтайландыру мәселелері қолданылады. Медицина және биологияда дәрі-дәрмектердің организмдегі таралуын және олардың әсерін модельдеу үшін дифференциалдық теңдеулер қолданылады. Экономикада және қаржылық модельдерде акциялардың бағасын болжау және тәуекелдерді басқару үшін стохастикалық дифференциалдық теңдеулер қолданылады. Тіпті, ғарышты зерттеуде ғарыш кемелерінің траекториясын есептеу және оларды басқару үшін дифференциалдық теңдеулер қолданылады [8]. Бұл мысалдар оқушыларға математиканың тек абстрактілі ғылым ғана емес, сонымен қатар біздің өміріміздің әртүрлі салаларында қолданылатын практикалық құрал екенін көрсетеді. Бұл білім оқушылардың математикаға деген қызығушылығын арттыруға және олардың математикалық ойлауын дамытуға көмектеседі.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР:

1. Қосымша математикалық әдістерді оқыту әдістемесі – Алматы, 2019. – 125 б.
2. Тригонометриялық теңсіздіктерді шешу әдістері – Нұр-Сұлтан, 2021. – 98 б.
3. Геометриялық интерпретациялар және олардың қолданыстары – Алматы, 2020. – 110 б.
4. Функционалдық тәсілдердің математикалық есептерді шешудегі рөлі – Астана, 2022. – 134 б.
5. Математикалық модельдеу және оның оқытудағы маңызы – Шымкент, 2023. – 147 б.
6. Оқушылардың математикалық ойлау қабілетін дамыту – Қарағанды, 2021. – 105 б.
7. Интерактивті оқыту әдістері – Тараз, 2020. – 90 б.
8. Математикалық логика және оның қолданбалы аспектілері – Өскемен, 2018. – 120 б.

DOI 10.24412/3007-8946-2025-31-15-19

ӘӨЖ: 372.851

ГЕОМЕТРИЯНЫ ОҚИТУДА ОҚУШЫЛАРДЫҢ БІЛІМІН БАҚЫЛАУ МЕН БАҒАЛАУ МӘСЕЛЕЛЕРІ

ҚҰРАЛОВА АҚПЕЙІЛ САБИТҚЫЗЫ

Абай атындағы ҚазҰПУ, Алматы, Қазақстан

Математика, физика және информатика институты, математика мұғалімдерін даярлау
Магистрант

Ғылыми жетекшісі: **АРДАБАЕВА А. К.**

Аңдатпа: Мақалада геометрия пәнін оқытуда оқушылардың білімін қалай бақылап, бағалауға болатыны туралы сөз болады. Онда геометрияны оқыту арқылы оқушылардың логикалық ойлауын дамыту, алған теориялық білімдерін өмірде қолдана білу дағдыларын қалыптастыру, сондай-ақ білімін бағалау үшін қолданылатын әдістердің тиімділігі талқыланады. Мақалада бағалау тәсілдерін жаңартып, оқушылардың білімін тексерудің жақсы жолдары ұсынылады.

Кілт сөздер: геометрияны оқыту логикалық ойлауды дамыту, теориялық білімді қолдану, бағалау әдістері, білімді тексеру жолдары.

Геометрияны оқытудың әдістемелік жүйесінің басты ерекшелігі – оқушылардың белсенді жұмыс істеуін, тыңдауға, ұжымдық жұмыстарды талқылауға қатысуын, өз жұмысына талдау жасап, оны жинақтап, ұйымдастыра алуын қамтамасыз етуінде. Оқушылар өз ойларын ашық айтып, өзгелердің тұжырымдарын тыңдай отырып, оларды қолдауға немесе оларға қарсылық білдіруге, шешімдер мен дәлелдерге негіздеме жасауға үйренеді [1]. Олар сонымен қатар, конспектілер жасап, тұжырымдарды ықшамдап, білім көздерімен жұмыс істеп, ақпараттық-коммуникациялық технологияларды қолдануды, өз қызметін жоспарлауды, бөлінген уақыт ішінде жұмысқа үлгеруді игереді.

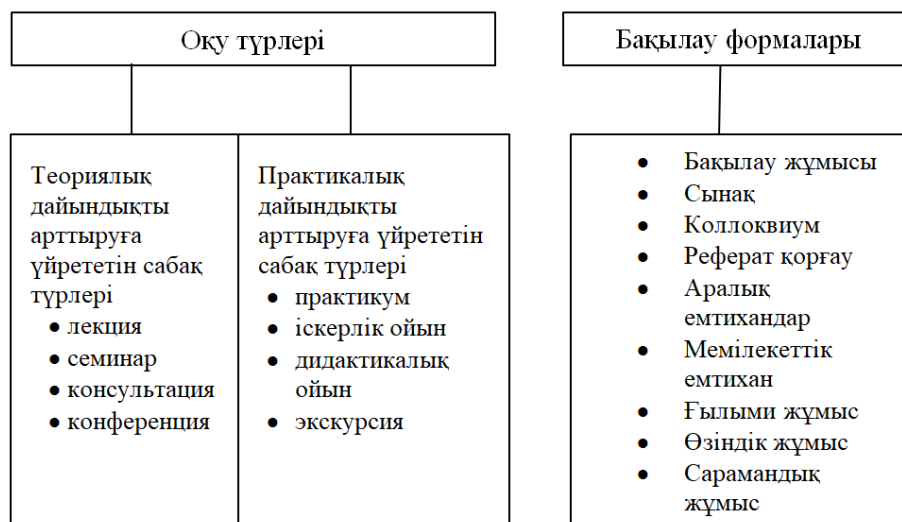
Геометрияны оқытудағы бақылау мен бағалаудың негізгі мақсаттарының бірі - оқушылардың геометриялық түсініктерді, теоремаларды және формулаларды меңгеру деңгейін анықтау. Бұл арқылы оқушылардың теориялық білімдерінің қаншалықты терең екендігін бағалауға болады. Сонымен қатар, бағалаудың маңызды аспектісі - оқушылардың геометриялық есептерді шешу және дәлелдеу қабілеттерін бағалау [2]. Бұл оқушылардың алған білімдерін практикада қолдана алуын және логикалық ойлауын көрсетеді.

Геометрияны оқытудың басты міндеттерінің бірі - оқушылардың кеңістіктік ойлау, логикалық пайымдау және проблемаларды шешу дағдыларын дамыту. Бақылау мен бағалау осы дағдылардың қалыптасуын қадағалап, оқушылардың жетістіктерін анықтайды [3].

Қазіргі уақытта геометрия пәнінің оқу мазмұны күрделеніп, оны меңгеруге бөлінген уақыттың шектеулі болуы мен қажетті ақпарат көлемінің өсуі байқалуда. Мұның себебі бірнеше негізгі факторлармен, атап айтқанда жаңартылған білім берудің енгізілуі, ақпараттық технологиялардың қарқынды дамуы, геометриямен пәнаралық байланысы бар ғылымның іргелі салаларына қоғамның талаптарының өзгеруімен түсіндіріледі.

Білім беру саласында енгізілген жаңа стандарттар мен бағдарламалар геометрия пәнін тереңдетуді және кеңейтуді талап етеді. Бұл бағдарламалар геометриялық ұғымдар мен теориялардан бөлек, олардың өмірдегі қолданылуын да қамтиды [4]. Басқа оқу пәндері секілді оқу мақсаты сабақтың басты межесі болып табылады. Жаңартылған білім мазмұны бойынша ұзақ мерзімді жоспарда тақырыппен қатар әр тақырыпқа оқу мақсаты да бекітіледі. Пән мазмұны бойынша қамтылатын білім, әр сабақта орындайтын тапсырмалар, олардың дескрипторлары дәл оқы оқу мақсатына сай таңдалады [5].

Геометрия пәні тек теориялық білім берумен шектелмей, практикалық дағдыларды да дамытуға бағытталған. Геометрияның күрделенуі инженерия, ғылым және басқа да салаларда қолданылатын дағдылар мен технологияларды меңгеруге мүмкіндік береді. Оқу түрлері практикалық және теориялық дағдыларды меңгеру сабақтары, оқытуды бақылау формалары 1 суретте көрсетілген.



1-сурет – Оқу түрлері мен бақылау формалары

Ақпараттық технологиялардың дамуы геометрияны оқытуда жаңа мүмкіндіктер туғызды. Осыған байланысты оқушыларға көп ақпарат берудің қажеттілігі туындады. Осыған байланысты, геометрияны оқыту процесін ғылыми негізде ұйымдастыру үшін әдістемелік жүйені жетілдіру қажет.

Геометрияны оқытуда жаңа әдіс-тәсілдер мен заманауи технологияларды қолдану оқушылардың оқу іс-әрекеттерін тиімді қалыптастыруға мүмкіндік береді. Белсенді оқыту әдістері арқылы оқушылар өздігінен білім алу, бір-біріне үйрету арқылы оқу процесіне белсенді қатысады [6]. Бұл тәсіл оқушылардың білім деңгейін тереңдетіп, теориялық білімдерін практикада қолдануға септігін тигізеді.

Оқушылардың геометрияға деген қызығушылығын арттыру және оларды ынталандыру да бағалаудың маңызды мақсаты болып табылады. Жағымды кері байланыс және жетістіктерін мойындау оқушыларды оқуға ынталандырады.

Бағалаудың негізгі функцияларының бірі - оқушыларға кері байланыс беру және олардың оқуын жақсартуға көмектесу. Бағалау нәтижелері оқушыларға өздерінің күшті және әлсіз жақтарын анықтауға, сондай-ақ оқу стратегияларын түзетуге көмектеседі [7]. Жаңартылған білім мазмұнына сай геометриядан бағалаудың бірнеше түрлерін мысалдарымен кестеде ұсынамыз.

Кесте 1 - Тапсырма мысалдары бағалау формаларына сәйкестендірілген тапсырма мысалдары

Бағалау формасы	Сипаттамасы	Тапсырмалардың мысалдары
Жазбаша жұмыстарды бағалау		
Бақылау жұмыстары	Негізгі теоремаларды, формулаларды, есеп шығару әдістерін білуді тексеру	Пифагор теоремасын дәлелдеу, үшбұрыштың ауданын табу

Өздік жұмыстар	Нақты тақырыпты немесе дағдыны меңгеруді тексеруге бағытталған шағын тапсырмалар	Геометриялық фигураларды салуға арналған есептерді шешу
Тесттер	Жауаптарды таңдау арқылы берілген тапсырмалар	Геометриялық фигураның дұрыс анықтамасын таңдау
Эсселер мен рефераттар	Геометриялық тұжырымдамаларды талдауды, оларды нақты жағдайларда қолдануды немесе геометрияның тарихи аспектілерін зерттеуді талап ететін тапсырмалар	Сәулеттегі геометрияның қолданылуы туралы эссе жазу
Геометриялық диктанттар	Терминдерді, анықтамаларды, фигуралардың қасиеттерін білуді тексеру	Геометриялық фигуралардың анықтамаларын жазу
Ауызша бағалау формалары		
Ауызша сұрау	Теоремаларды, анықтамаларды, есеп шығару әдістерін түсінуді тексеруге бағытталған сұрақтар	Шеңбердің ауданын қалай табуға болатынын түсіндіру
Жобаларды қорғау	Оқушылардың геометриялық білімді практикалық есептерді шешуге қолдану қабілетін бағалау	Геометриялық фигураның моделінің жобасын ұсыну
Есеп шығару шешімдерін түсіндіру	Логикалық ойлауды және ойын анық және дәйекті түрде жеткізе білуді бағалау	Геометриялық есептің шешілу жолын түсіндіру
Практикалық жұмыстар		
Геометриялық есептерді шығару	Теориялық білімді практикалық есептерді шешу үшін қолдану	Пирамиданың көлемін табуға арналған есепті шешу
Геометриялық фигураларды салу	Геометриялық фигураларды салу құралдарын қолдану және олардың қасиеттерін білу	Кубтың қимасын жазықтық арқылы салу
Геометриялық шамаларды өлшеу	Өлшеу құралдарын қолдану және ауданды, көлемді және басқа шамаларды есептеу формулаларын қолдану	Үшбұрыштың бұрыштарын өлшеу және оның ауданын есептеу
Геометриялық модельдеу	Өртүрлі материалдарды қолдана отырып геометриялық фигуралардың модельдерін жасау	Қағаздан геометриялық фигураның моделін жасау
Басқа бағалау формалары		
Портфолио	Оқушының геометрияны оқудағы жетістігін көрсететін жұмыстар жинағы	Геометрия бойынша үздік жұмыстарды жинау
Сабақтағы жұмысты бақылау	Белсенділікті, талқылауларға қатысуды, топта жұмыс істеу қабілетін бағалау	Геометриялық есептің шешімін талқылауға қатысу
Өзін-өзі бағалау	Оқушының материалды түсіну деңгейін және пәнді оқудағы жетістігін бағалау	"Шеңбер ауданы" тақырыбын түсіну деңгейін бағалау
Өзара бағалау	Оқушылардың бір-бірінің жұмысын бағалауы	Геометриялық есепті шығарудағы сыныптасының жұмысын бағалау

Оқушылардың оқу әрекетін ұйымдастыру мен оның нәтижелерін бақылау үшін мұғалім әртүрлі әдістер мен құралдарды қолданады. Жаңартылған білім беру мазмұны аясында оқу процесін ұйымдастыру оқушылардың белсенді қызметін талап етеді. Мұғалім оқушылардың танымдық іс-әрекеттерін дұрыс ұйымдастырып, жетекшілік етеді.

Практикалық жұмыстар геометриялық фигураларды салу, өлшеу, есептеу және модельдеу арқылы практикалық дағдылары бағаланады. Өздік жұмыстар оқушылардың өз бетінше жұмыс істеу қабілетін және тақырыпты түсіну деңгейін бағалайды [8]. Портфолио оқушылардың жұмыстарының жиынтығы, олардың прогресін және жетістіктерін көрсетеді. Жобалық жұмыстар оқушылардың зерттеу, талдау және қорытынды жасау дағдыларын бағалауға арналған. Тесттік тапсырмалар теориялық білімді тез арада тексеруге мүмкіндік бергенімен, дәстүрлі әдіс ретінде кемшіліктерге ие.

Жазбаша бақылау жұмыстары теориялық білімді және есептерді шығару дағдыларын бағалауға арналған “тұжырымның дұрыс бұрыстығын анықтау” тапсырма мысалын ұсынамыз.

Төмендегі тұжырымдардың дұрыс немесе бұрыс екенін анықтаңыз:

1. Екі параллель түзуді үшінші түзу қиғанда пайда болған ішкі айқыш бұрыштар өзара тең болады.
2. Кез келген төртбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы 360 градусқа тең.
3. Трапецияның қарама-қарсы қабырғалары параллель болады.
4. Дөңгелектің ауданы оның радиусының квадратына пропорционал.
5. Пифагор теоремасы кез келген үшбұрыш үшін орындалады.
6. Тең бүйірлі үшбұрыштың табанындағы бұрыштары өзара тең болады.
7. Тік бұрышты үшбұрыштың ауданы оның катеттерінің көбейтіндісінің жартысына тең.
8. Параллелограммның диагональдары қиылысу нүктесінде қак бөлінеді.
9. Кез келген тік төртбұрыш - квадрат болып табылады.
10. Шеңбердің центрінен хордаға түсірілген перпендикуляр хорданы қак бөледі [9].

Геометрия екі негізгі іргелі бөлімдерден тұрады. Жазықтықтағы және кеңістіктегі фигуралар туралы тұжырымдамаларды талдауға аталған тапсырмаларды құрастыру да жаңа платформаларда қолжетімді. Келесі он тұжырым кеңістіктегі фигураларға арналған тапсырма төменде көрсетілген.

Төмендегі тұжырымдардың дұрыс немесе бұрыс екенін анықтаңыз:

1. Кез келген пирамиданың табаны – үшбұрыш.
2. Конустың көлемі оның табанының ауданы мен биіктігінің көбейтіндісінің үштен бір бөлігіне тең.
3. Сфераның көлемі оның радиусының кубына пропорционал.
4. Призманың бүйір жақтары – параллелограммдар.
5. Тік бұрышты параллелепипедтің барлық жақтары – тік төртбұрыштар.
6. Цилиндрдің бүйір бетінің ауданы оның табанының периметрі мен биіктігінің көбейтіндісіне тең.
7. Пирамиданың бүйір бетінің ауданы оның бүйір жақтарының аудандарының қосындысына тең.
8. Кубтың диагоналі оның қырынан ұзын болады.
9. Конустың осьтік қимасы – тең бүйірлі үшбұрыш.
10. Сфераның кез келген қимасы – дөңгелек [10].

Бір есепті әртүрлі тәсілдермен шешу арқылы белгілі бір ұғымның, тақырыптың, бөлімнің мазмұнын және бүкіл геометрия курсына жақсырақ түсінуге болады. Есептің мазмұнына қарай,

оны әртүрлі тәсілдермен шеше отырып, белгілі бір әдістің ерекшеліктерін, оның артықшылықтары мен кемшіліктерін тереңірек түсінуге болады [11].

Ауызша сұрақ-жауап оқушылардың түсініктерін, теоремаларды және анықтамаларды білуін тексереді. Оқыту мен үйретудің тиімді әдістерін дұрыс таңдап, оларды ұйымдастыру оқу процесінің сапасын арттырады. Заманауи оқыту технологияларын қолдану оқушылардың ойлау дағдыларын дамытуға, өздерінің білімін күнделікті өмірде қолдану дағдыларын қалыптастыруға көмектеседі. Мектептегі педагогикалық тәжірибеміз көрсеткендей, бір есепті әртүрлі тәсілдермен шешу оқушылардың логикалық ойлауын, тапқырлығын, сыни көзқарасын, әрекетті тиімді етуге, әртүрлі жағдайларды шешудің дұрыс жолын табуға ықпал етеді.

Геометриялық есептердің классификациясына сәйкес әртүрлі болуына байланысты, оқушыларды оларды шешу техникасымен және әртүрлі шешу әдістерімен таныстыру маңызды. Алгебрадан геометрияның ерекшелігі - мұнда стандартты, үлгі бойынша шешілетін есептер жоқ. Әрбір геометриялық есеп шешудің "жеке" тәсілін талап етеді.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ:

1. Сапарова К. Геометрия курсының мазмұны және оқыту әдістері. – Шымкент, 2017. - 80 б.
2. Нұрғали Е.Қ. Білімді бағалау технологиялары. – Нұр-Сұлтан, 2019. - 124б.
3. Кенжебекова Г.Т. Геометрияны оқыту әдістері. – Шымкент, 2021. - 55 б.
4. Сәтімбекова Ә.Қ. Жаңартылған білім мазмұны аясында бағалау әдістері. – Алматы, 2018. - 132 б.
5. Тұрсынбай Б.Қ. Орта білімдегі жаңартылған бағдарламалар. – Қарағанды, 2019. - 64 б.
6. Баймұратов С. Білім мазмұнын жаңарту мәселелері. – Шымкент, 2020. - 35 б.
7. Қуандықова Р. Интерактивті оқыту әдістері. – Алматы, 2019. - 88 б.
8. Сүлейменова Д. Математиканы оқытудағы инновациялық технологиялар. – Нұр-Сұлтан, 2021. – 115-123 б.
9. Әбілқасымова А.Е. Математиканы оқыту әдістемесі. – Алматы: Мектеп, 2020. - 220 б.
10. Қасымбаев Ж. Геометрия есептер жинағы. – Алматы, 2018. - 231 б.
11. Жұмағұлова М. Геометриялық есептерді шешу жолдары. – Алматы, 2017. - 54 б.

DOI 10.24412/3007-8946-2025-31-20-24

ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР МЕН ТЕҢСІЗДІКТЕРДІ ШЕШУ ӘДІСТЕРІ

МЫНЖАСОВА МӨЛДІР НУРЛАНҚЫЗЫ

магистрант

7M01501 – Математика педагогтерін даярлау мамандығының 1 курс магистранты, Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

Ғылыми жетекші: ҚАСҚАТАЕВА Б.Р., п.ғ.д., доцент

Аңдатпа: Бұл мақалада тригонометриялық теңдеулер мен теңсіздіктерді шешудің алгебралық әдісі, айнымалыны ауыстыру әдісі, көбейткіштерге жіктеу, интервал әдісі қарастырылады. Әрбір әдіске сәйкес мысалдар келтіріліп, шешу жолдары егжей-тегжейлі түсіндіріледі. Қазіргі уақытта мектепте тригонометриялық тақырыптарды оқыту оқушылардың математикалық ойлау қабілетін дамытуда және олардың аналитикалық дағдыларын жетілдіруде маңызды рөл атқарады.

Кілтсөздер: тригонометриялық теңдеулер, теңсіздік, түбір, синус, косинус, түрлендіру, бұрыш, график, көбейткіш

Тригонометрия – тригонометриялық функцияларды және олардың геометрияда қолданылуын зерттейтін математика саласы. "Тригонометрия" термині алғаш рет 1595 жылы неміс математигі Бартоломей Питискустың кітабының атауы ретінде пайда болды, ал ғылымның өзі ежелгі дәуірде есептеулер үшін қолданылған астрономия, сәулет және геодезия үшбұрыштың кейбір элементтерін оның басқа элементтері туралы мәліметтерден есептеу үшін, алдын-ала белгілі немесе өлшеуге ыңғайлы [1].

Мақаланың мақсаты – оқырмандарға тригонометриялық теңдеулер мен теңсіздіктерді шешудің тиімді жолдарын ұсыну және оларды математикалық есептерде қолдануға көмектесу.

Тригонометрия геометрияның, физиканың және инженерияның барлық дерлік салаларында қолданылады. Мысалы, астрономиядағы жақын жұлдыздарға дейінгі қашықтықты, географиядағы бағдарлар арасындағы қашықтықты өлшеуге, спутниктердің навигациялық жүйелерін басқаруға мүмкіндік беретін триангуляция техникасының маңызы зор. Тригонометриялық теңдеулер мен теңсіздіктердің шығару әдістерін қарастырайық.

Тригонометриялық теңдеулерді шешудегі негізгі әдістерге төмендегілерді жатқызсақ болады:

1) *Алгебралық әдіс* – тригонометриялық теңдеулерді шешу барысында тригонометриялық функцияларды алмастыру, түрлендіру немесе теңдеуді алгебралық түрде қайта құру арқылы шешетін әдіс.

1-есеп. $2\cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 3\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + 1 = 0$,

Шешуі: Келтіру формуласын қолдану арқылы, төмендегідей теңдеу аламыз:

$$2\cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 3\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0$$

Жаңа айнымалы енгіземіз: $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = y$, сонда $2y^2 - 3y + 1 = 0$,

Түбір табамыз: $D = b^2 - 4ac$; $D = (-3)^2 - 4 * 2 * 1 = 9 - 8 = 1$,

$y_1 = 1$; $y_2 = \frac{1}{2}$, осыдан екі жағдай шығады:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1, \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 2\pi k, \quad \left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi k,$$

$$x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z, \quad x_2 = \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$$

$$\text{Жауабы: } x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad x_2 = \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

2) *Көбейткіштерге жіктеу*– тригонометриялық теңдеулерді шешу кезінде көбейткіштерге жіктеу әдісі көбейтуге байланысты теңдеулерді шешудің тиімді тәсілдерінің бірі болып табылады. Бұл әдіс негізінен тригонометриялық өрнекті көбейткіштерге жіктеу арқылы оның әрбір бөлек көбейткіші нөлге тең болатын жағдайды қарастыруға негізделген.

2-есеп. $\cos^2 x + \sin x * \cos x = 1$ теңдеуін шешу

Шешуі: Негізгі тригонометриялық тепе-теңдікті қолдану арқылы төмендегідей теңдеу аламыз:

$$\cos^2 x + \sin x * \cos x - \sin^2 x - \cos^2 x = 0,$$

$$\sin x * \cos x - \sin^2 x = 0,$$

$$\sin x (\cos x - \sin x) = 0,$$

Түбір табамыз: 1) $\sin x = 0$; $x_1 = \pi k, k \in Z$

2) $\cos x - \sin x = 0$; $\operatorname{tg} x = 1$; $x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$,

$$\text{Жауабы: } x_1 = \pi k, \quad x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

3) *Біртекті теңдеуге келтіру*

$a \sin x + b \cos x = 0$ түріндегі теңдеу біртекті теңдеу деп аталады, егер әрбір қосылғыштың дәреже көрсеткіштері өзара тек болса. Біртекті теңдеулерді шешу алгоритмі:

1. Барлық мүшесін теңдеудің сол жағына апарамыз;

2. Ортақ көбейткішті жақша сыртына шығарамыз;

3. Көбейткіштермен жақшаларды 0-ге теңестіреміз;

4. Теңдеудің түбірлерін табамыз.

3-есеп. $3 \sin^2 x + 4 \sin x * \cos x + 5 \cos^2 x = 2$ теңдеуін шешу

Шешуі: $3 \sin^2 x + 4 \sin x * \cos x + 5 \cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$,

$$\sin^2 x + 4 \sin x * \cos x + 3 \cos^2 x = 0, \quad (/ \cos^2 x)$$

$$\operatorname{tg}^2 x + 4 \operatorname{tg} x + 3 = 0, \quad \text{жаңа айнымалы енгіземіз } \operatorname{tg} x = y,$$

$$y^2 + 4y + 3 = 0,$$

Түбір табамыз: $D = b^2 - 4ac$; $D = (4)^2 - 4 * 1 * 3 = 16 - 12 = 4$,

$$y_1 = -1, \quad y_2 = -3$$

1) $\operatorname{tg} x = 1$; $x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$,

2) $\operatorname{tg} x = -3$; $x_2 = -\arctg 3 + \pi n, n \in Z$

$$\text{Жауабы: } x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad x_2 = -\arctg 3 + \pi n$$

4) *Қосбұрышқа көшіру*

Теңдеулерді шешу үшін төмендегідей формулаларды қолданамыз:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x;$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x;$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1;$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x;$$

4-есеп. $3 \sin x - 5 \cos x = 7$ теңдеуін шешу

Шешуі: $3 * 2 \sin \frac{x}{2} * \cos \frac{x}{2} - 5 \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) = 7 \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right)$,

$$2 \sin^2 \frac{x}{2} - 6 \sin \frac{x}{2} * \cos \frac{x}{2} + 12 \cos^2 \frac{x}{2} = 0, \quad (/ 2 \cos^2 x)$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 6 = 0,$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \text{тайнымалысын енгіземіз, } t^2 - 3t + 6 = 0,$$

$$D = 9 - 4 * 1 * 6 = 9 - 24 = -15 \Rightarrow \text{түбірі жоқ}$$

Жауабы: Теңдеудің түбірі жоқ

5) Көмекші бұрыш енгізу

Жалпы жағдайды қарастырайық – $a \cos x + b \sin x = c$. Екі жағында $\sqrt{a^2 + b^2}$ -қа бөлеміз;

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

Бұны неге істедік? Теңдеудегі синуспен косинустың коэффициенттерін квадраттасак мәні 0-ге тең екенін байқауға болады.

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1;$$

$$\text{Олай болса, } \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \varphi, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \varphi;$$

$$\cos \varphi \cos x + \sin \varphi \sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\cos(x - \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

Көмекші бұрыш – φ

5-есеп. $\sqrt{3} \sin 3x - \cos 3x = 1$ теңдеуін шешу

Шешуі: $a = \sqrt{3}; b = -1$, екі жағында $\sqrt{3 + 1} = 2$ – ге бөлеміз

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 3x - \frac{1}{2} \cos 3x = \frac{1}{2},$$

$$\cos \frac{\pi}{3} * \sin 3x - \sin \frac{\pi}{6} * \cos 3x = \frac{1}{2},$$

$$\sin \left(3x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2},$$

$$x = (-1)^k * \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z,$$

$$\text{Жауабы: } x = (-1)^k * \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}$$

6) Көбейтіндіні қосындыға түрлендіру

Теңдеулерді шығару үшін төмендегідей формулаларды қолданамыз:

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$$

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$$

6-есеп. $2 \sin x * \sin 3x = \cos 4x$,

Шешуі: Теңдеудің сол жағын түрлендіреміз:

$$\cos 4x - \cos 8x = \cos 4x,$$

$$\cos 8x = 0,$$

$$8x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z,$$

$$x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{8}, k \in Z$$

$$\text{Жауабы: } x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{8}$$

Қарапайым тригонометриялық теңсіздіктерді шешу тригонометриялық шеңберде негізгі тригонометриялық бұрыштармен қатар басқа мәндерді де анықтау дағдылары мен білімдеріне негізделген.

Тригонометриялық теңсіздіктерді шешу үшін келесі әдістер бойынша жіктеуге болады:

- 1) Ең қарапайым тригонометриялық теңсіздіктер
- 2) Қарапайымға келтірілетін тригонометриялық теңсіздіктер
- 3) Айнымалыны ауыстыру әдісімен шешілетін теңсіздіктер
- 4) Көбейткіштерге жіктеу әдісімен шешілетін теңсіздіктер
- 5) Интервал әдісімен шешілетін теңсіздіктер

Тригонометриялық теңсіздіктерді шешу тригонометриялық теңдеулерді шешуге ұқсас. Екі жағдайда да негізгі тригонометриялық тепе-теңдіктер қолданылады, теңдеуді бір тригонометриялық функцияға келтіру әдістері қарастырылады, сондай-ақ мәндер тригонометриялық шеңберде талданады. Дегенмен, теңсіздіктерді шешу кезінде тек түбірлерді табу ғана емес, сонымен қатар теңсіздіктің белгілі бір аралықтардағы таңбаларын ескеру және тригонометриялық функциялардың периодтылығын қарау қажет.

7-есеп. $3\sin^2 2x + 7\cos 2x - 3 < 0$ теңсіздігін шешу

Шешуі: $\sin^2 2x$ - ты ашып, теңдеуді түрлендіреміз:

$$\cos 2x(7 - 3\cos 2x) < 0, \text{ екінші көбейтінді әрбір } x \text{ үшін оң болған соң } \Rightarrow$$

$$\cos 2x < 0$$

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi n < 2x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Жауабы: } \left[\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{3\pi}{4} + \pi n\right]$$

8-есеп. $\frac{15}{\cos x + 1} < 11 - 2\cos x$ теңсіздігін шешу

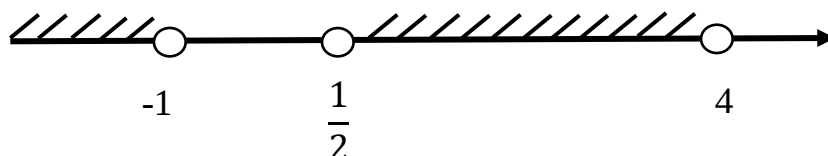
Шешуі: Жаңа айнымалы енгіземіз: $y = \cos x$

$$\frac{15}{y + 1} < 11 - 2y,$$

Ортақ бөлім беріп есептейміз, сол кезде төмендегідей теңдеу аламыз:

$$\frac{2(y - 4)\left(y - \frac{1}{2}\right)}{y + 1} < 0,$$

$$y_1 = 4, y_2 = \frac{1}{2}, y_3 = -1$$



Интервалдар әдісі арқылы:

$$y < -1; \frac{1}{2} < y < 4$$

$\cos x < -1$ теңсіздігінің шешімі жоқ

$$\frac{1}{2} < \cos x < 4$$

$$\frac{1}{2} < \cos x \leq 1$$

$$\frac{1}{2} < \cos x: \quad -\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$\cos x \leq 1$: барлық x үшін орындалады

Екі жауапты біріктірсек,

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Жауабы: } \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right]$$

Қорытындылай келе, математика – біздің күнделікті өміріміздің ажырамас бөлігі, ал тригонометрия оның маңызды салаларының бірі болып табылады. Қазіргі әлемде

тригонометриялық теңдеулер мен теңсіздіктерді түсіну және оларды шешу әдістерін меңгеру – оқушылардың математикалық және аналитикалық ойлау қабілеттерін дамыту үшін шешуші рөл атқарады.

Мектепте тригонометриялық тақырыптарды оқыту оқушылардың білім деңгейін арттыруға, олардың күрделі есептерді шешу дағдыларын қалыптастыруға ықпал етеді. Тригонометриялық теңдеулер мен теңсіздіктерді зерттеу тек теориялық маңызды емес, сонымен қатар практикалық құндылыққа ие. Бұл тақырып оқушыларға математикалық ұғымдарды түсінуге және оларды шынайы өмірде қолдануға көмектеседі. Тригонометрияны меңгеру зияткерлік қабілеттерді дамытуға, логикалық ойлауды жетілдіруге және болашақ кәсіби қызметке дайындыққа мүмкіндік береді.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Абылқасымов А. Е. Математиканы оқыту әдістемесі. Алматы: Рауан, 2019.
2. Шарыгин И. Ф. Задачи по тригонометрии: теория и практика. Москва: Физматлит, 2017.
3. Аджиева, А. Тригонометрические уравнения / А. Аджиева // Математика. Приложение к газете «Первое сентября»-Москва: Просвещение, 2015 г. - № 33. - с.13.
4. Учебно-методическое пособие / Е.Р. Садыкова, О.В. Разумова. – Казань: Казан. ун-т, 2013.
5. Кравцев С. В. Методы решения задач по алгебре: от простых до самых сложных. – М.: Экзамен, 2001.
6. Шыныбеков А., Шыныбеков Д., Жумабаев Р. Алгебра және анализ бастамалары. – Алматы: Атамұра, 2019.

DOI 10.24412/3007-8946-2025-31-25-29
ӘОЖ 372.851

ЕРІКТІ ТЕРБЕЛІСТЕР

СЕРМУРЗАЕВА ЗУЛФИЯ СУНДЕТОВНА

М. Әуезов атындағы ОҚУ жаратылыстану ғылымдары және педагогикасы жоғары
мектебінің магистранты

Аңдатпа. Тербелмелі процесстер мен жүйелердің табиғатта, техникада және табиғатта кең таралғаны сонша, біздің кез келгеніміз күнделікті өмірде олармен қайта-қайта кездесеміз және шамасы, олардың негізгі қасиеттерін оңай тұжырымдай аламыз. Шынында да, біз температураның, айырбас бағамының, электр кернеуінің, маятниктің, су деңгейінің және т.б. ауытқулар туралы естігенде, біз белгілі бір қайталану дәрежесіне ие және бастапқы немесе жақын күйге оралатын уақыт немесе кеңістіктегі процесстер туралы айтып отырғанымызды түсінеміз. Сонымен қатар, процесстердің бұл негізгі қасиеттері жүйелердің табиғатына байланысты емес, сондықтан жалпы пәнаралық көзқарас шеңберінде бір көзқараспен сипатталуы және зерттелуі мүмкін. Дәл осы тәсілді тербеліс теориясы дамытады, оның пәні әртүрлі сипаттағы жүйелердегі тербелмелі құбылыстар мен процесстер болып табылады. Тербеліс теориясы нақты жүйелердің тербелмелі қасиеттерін сәйкес модельдерді талдаудан алады. Осындай талдау нәтижесінде модельдің параметрлері мен оның тербелмелі қасиеттері арасында байланыс орнатылады.

Кілттік сөздер. Тербелмелі процесс, математикалық модель, физика, маятник, ішек, механика, уақыт, құбылыс, гармоникалық тербеліс.

Ерікті тербелістердің теңдеуі мына түрде болады[1]:

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (p \geq 0, q > 0) \quad (1)$$

Бұған сәйкес сипаттамалық теңдеуді жазамыз:

$$k^2 + pk + q = 0$$

және оның түбірлерін табамыз:

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

1) Айталық, $\frac{p^2}{4} > q$ болсын. Онда k_1 және k_2 түбірлері нақты теріс сандар. Жалпы шешімі былай өрнектеледі:

$$y = c_1 e^{k_1 t} + c_2 e^{k_2 t} \quad (k_1 < 0, k_2 < 0)$$

(2)

Бұл формуладан $t \rightarrow \infty$ -да у ауытқудың асимптотикалық түрде нөлге ұмтылатындығын көреміз. Бұл жағдайда тербеліс болмайды.

2) Айталық, $\frac{p^2}{4} = q$ болсын. Онда k_1 мен k_2 түбірлер өзара тең болады, яғни түбір « $-\frac{p}{2}$ » теріс санына тең. Сондықтан, жалпы шешімі мынандай болады:

$$y = c_1 e^{-\frac{p_1}{2}t} + c_2 t e^{-\frac{p}{2}t} = (c_1 + c_2 t) e^{-\frac{p}{2}t} \quad (3)$$

Бұл жерде де у ауытқу $t \rightarrow \infty$ -да нольге ұмтылады, бірақ $c_1 + c_2 t$ көбейткішінің әсері бойынша алдыңғыға қарағанда жылдам емес.

3) Айталық, $p = 0$ болсын, яғни кедергі күші жоқ болған жағдай. Онда (1) теңдеу мына түрде болады[2]:

$$y'' + qy = 0 \quad (4)$$

Сипаттамалық теңдеу құрсақ, ол мына түрде болады.

$$k^2 + q = 0.$$

Ал оның түбірлері $k_1 = w_0 i$, $k_2 = -w_0 i$, мұндағы $w_0 = \sqrt{q}$. Жалпы шешім:

$$y = c_1 \cos w_0 t + c_2 \sin w_0 t \quad (5)$$

Соңғы формуладағы кез келген тұрақтылар c_1 мен c_2 сандарын басқа сандармен алмастырамыз. Атап айтқанда, A және φ_0 тұрақтыларын ендіреміз. Олар c_1 мен c_2 мен мына түрде байланысқан:

$$c_1 = A \sin \varphi_0, \quad c_2 = A \cos \varphi_0.$$

A мен φ_0 c_1 мен c_2 арқылы былай анықталады:

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \varphi_0 = \arctg \frac{c_1}{c_2}$$

c_1 мен c_2 - нің мәндерін (4) – ке апарып қойып, мынаған келеміз

$$y = A \sin \varphi_0 \cos \beta t + A \cos \varphi_0 \cdot \sin \beta t$$

немесе

$$y = A \sin(w_0 t + \varphi_0) \quad (6)$$

Бұл жағдайда тербеліс гармоникалық тербеліс деп аталады, себебі интегралдық қисықтар синусоида болып табылады. Синустың аргументі 2π -ге өзгертін уақыт аралығы T -ні тербелістің периоды деп атайды, берілген жағдайда $T = \frac{2\pi}{w_0}$. Тербелістің жиілігі деп 2π

уақыты үшін тербеліс санын айтады, ол w_0 -ға тең. A -ны тербелістің амплитудасы деп, ал φ_0 -ді бастапқы фаза деп атайды.

4) Айталық $p \neq 0$ және $\frac{p^2}{4} < q$ болсын.

Бұл жағдайда сипаттамалық теңдеудің түбірлері комплекс сандар $k_1 = \alpha + i w_0$, $k_2 = \alpha - i w_0$, мұндағы $\alpha = \frac{p}{2}$, $w_0 = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$.

Жалпы шешім мына түрде болады:

$$y = e^{\alpha t} (c_1 \cos w_0 t + c_2 \sin w_0 t) \quad (7)$$

немесе

$$y = A e^{\alpha t} \sin(w_0 t + \varphi_0) \quad (8)$$

Бұл жерде амплитуда ретінде $A e^{\alpha t}$ шамасын қарастыруға болады. Ол уақытқа тәуелді, бірақ $\alpha < 0$, онда $t \rightarrow \infty$ -да амплитуда нөлге ұмытылады, яғни бұл жерде өшетін тербелістер пайда болады.

Үйкеліс бар кезінде сызықты осциллятор тербелістерінің энергиясы азаятындықтан, тербелістер амплитудасы кішірейеді. Яғни, үйкеліс әсерінен тербелістер өшпелі болады.

Мысал ретінде материялық нүктенің тұтқыр ортадағы өшпелі түзу сызықты тербелістерін қарастырайық. Нүктеге ішкі квазисерпимді $F = -kx$ күш және сыртқы кедергі

күш әрекет етеді. Қозғалыстың аз жылдамдықтарында кедергі күші жылдамдыққа пропорционал және оған қарсы бағытталған[3]:

$$F_k = -r \frac{dy}{dt},$$

мұнда r - кедергі коэффициенті. Демек, нүкте қозғалысының теңдеуі мына түрде жазылады:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky - r \frac{dy}{dt},$$

бұдан

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dy}{dt} + \frac{k}{m} y = 0.$$

(9)

Егер $\frac{r}{m} = 2\beta$, $\frac{k}{m} = w_0^2$ арнаулы белгілер енгізсек, (8) теңдеу

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\beta \frac{dy}{dt} + w_0^2 y = 0 \quad (10)$$

түрге келеді. Енді ары қарай түрлендіру үшін y -пен

$$y = z \cdot e^{-\beta t} \quad (11)$$

қатыс арқылы байланысқан z айнымалыны алып, $\frac{dy}{dt}$ және $\frac{d^2 y}{dt^2}$ туындыларды есептейік:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= e^{-\beta t} \frac{dz}{dt} - \beta e^{-\beta t} \cdot z, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= e^{-\beta t} \frac{d^2 z}{dt^2} - 2\beta e^{-\beta t} \frac{dz}{dt} + \beta^2 e^{-\beta t} \cdot z \end{aligned}$$

Алынған нәтижелерді (10) формулаға қойып, қарапайым амалдардан кейін

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + (w_0^2 - \beta^2) z = 0 \quad (12)$$

теңдеуді аламыз. Енді $w_0^2 - \beta^2 = w^2$ белгі енгізіп, (12) теңдеуді $w_0^2 > \beta^2$ шартқа сәйкес сараптайық:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + w^2 z = 0 \quad (13)$$

Демек, оның шешімін мына түрде жазуға болады:

$$z = A_0 \sin(wt + \varphi), \quad (14)$$

мұнда A_0 және φ - бастапқы шарттардан анықталатын тұрақтылар. (14) – формулаға (11) – ден анықталған z мәнін қойсақ

$$y = A_0 e^{-\beta t} \sin(wt + \varphi) \quad (15)$$

Мұндағы синус функциясы алдындағы шама өшпелі тербелістердің амплитудасын өрнектейді:

$$A = A_0 e^{-\beta t} \quad (16)$$

тербелістер периоды z және y шамалар үшін бірдей болып,

$$T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{\sqrt{w_0^2 - \beta^2}}$$

(17)

қатыспен есептеледі. Бұған қарағанда, өшпелі тербелістер периодының кедергі күші әрекетінен өсуі тербелмелі жүйенің k тұрақтысының квазисерпімді күштің азаюынан туған кішірейіуімен байланысты. Яғни $w_0 = \frac{k}{m}$ болғандықтан, тербелістер жиілігі азайып, периоды

өсу керек. Тербелістердің өшу жылдамдығын анықтайтын $\beta = \frac{r}{2m}$ шаманы өшу коэффициенті деп атайды. Енді тербеліс амплитудасының e есе кішірейіуіне кететін τ уақытты есептейік. Ол үшін (16)-дан[4]:

$$\frac{A_0}{A} = e = e^{\beta\tau},$$

яғни

$$\tau = \frac{1}{\beta}. \quad (18)$$

Демек, өшу коэффициенті амплитуда e есе азаятын уақыт аралығына кері шама екені айқын.

Тербелмелі жүйені сипаттау үшін көбіне өшудің логарифмдік декременті түсінігі жиі қолданылады. Өшудің логарифмдік декременті (λ) деп тербелістің арасында T периодқа тең уақыт аралығы бар екі амплитудалары қатынасының логарифмін айтады:

$$\lambda = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta T} = \beta T \quad (19)$$

Осы нәтижеге сәйкес тербеліс амплитудасын анықтайтын (16) формула

$$A = A_0 e^{-\frac{\lambda}{T} t} \quad (20)$$

түрге ауысады.

Тербеліс амплитудасы e есе кішірейетін τ уақыт аралығында жүйе $N_e = \frac{\tau}{T}$ тербелістер жасап үлгереді. $e^{-\lambda \frac{\tau}{T}} = e^{-1}$ шарттан $\lambda \frac{\tau}{T} = \lambda N_e = 1$ екенін көреміз. Демек, өшудің логарифмдік декременті – амплитуда e есе кішірейетін уақыт аралығында жасалатын тербелістер санына кері шама.

Үйкеліс артқан сайын тербеліс периоды өсе түседі. Егер $\beta = w_0$ болса, период шексіздікке ұмтылып, қозғалыс периодты болудан қалады. Егер $\beta = w_0$ болса, қозғалыс апериодты түрде жүреді, яғни тепе – теңдік жағдайдан шығарылған дене тепе – теңдік нүктесіне тербеліс жасамай қайтады. Жүйенің тепе – теңдік жағдайға қайту жолы бастапқы шарттарға байланысты[5].

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Зарубин В.С. Математическое моделирование в технике: Учеб. для вузов/ Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко.- М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.-234б.
2. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний.-М., Наука, 1972.-187б.
3. Пейн Г. Физика колебаний и волн.-М., Мир,1979.-145б.
4. Ландау Л.Д. ,Лифшиц Е.М. Механика.-М., Наука, 1973.-168б.
5. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов. Под.ред.Б.П. Демидовича.- М.; Наука, 1978.-269б.

DOI 10.24412/3007-8946-2025-31-30-34

ӘОЖ 517.958:532.5

ҰЗЫНДЫҒЫ ШЕКТЕУЛІ ӨЗЕКШЕДЕГІ ЖЫЛУДЫҢ ТАРАЛУ ТЕНДЕУІ

ДӘРІБАЙ ДАНА МҰХТАРҚЫЗЫ

М. Әуезов атындағы ОҚУ жаратылыстану ғылымдары және педагогикасы жоғары мектебінің магистранты

Аңдатпа. Әртүрлі теориялық және қолданбалы есептерді шешу үшін қазіргі заманғы инженер-маман математикалық физиканың негізгі ұғымдары мен әдістерін білуі және практикада қолдануы қажет. Математикалық физиканың теңдеулері өте жоғары дәрежеде күрделі. Жалпылау және абстракциялау – математиканың қарапайым дифференциалдық теңдеулер, қатарлар, еселік интегралдар, өрістер теориясы және т.б. сияқты көптеген басқа бөлімдерін білуді талап ететін бөлімі. Мысалы, толқындардың ортада, жылудың стерженде таралуы туралы мәселелер құрылыста, құрылыс материалдары мен бұйымдарын өндіруде, жылу техникасында және машина жасаудың көптеген басқа салаларында туындайды.

Кілттік сөздер. Жылу өткізгіштік, теңдеу, өзекше, ұзындық, жылу таралуы, айнымалы, ішек, бастапқы шарттар, температура.

Ұзындығы өзгермейтін және ℓ -ға тең, бүйір беті жылудан оқшауланған, кез келген уақытта көлденең қимасының барлық нүктелерінің температуралары бірдей болуы үшін өте жіңішке біртекті өзекшені қарастырамыз. Ох өсін өзекшенің өсімен бағыттап, өзекше өстің $[0, \ell]$ кескінімен беттеседі деп алайық. x абсциссасын қиғанда шығатын өзекшенің көлденең қимасындағы t уақыттағы температураны $u(x, t)$ арқылы белгілеп, осы функцияны қанағаттандыратын теңдеуді қорытып шығарайық. Жылудың таралуымен байланысты физикалық заңдылықтарды еске алайық. Егер дененің температурасы бірқалыпты болмаса, онда жылу ағыны әрқашан температурасы жоғары бөліктен температурасы төмен бөлікке қарай қозғалады. x абсциссасын перпендикуляр қиғанда шығатын көлденең қиманың ауданынан $(t, t + \Delta t)$ уақыт аралығында өтетін жылу мөлшері мынаған тең[1]:

$$-kS \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dt,$$

мұндағы: k – жылу өткізгіштік коэффициенті, S – өзекшенің көлденең қимасының ауданы.

Екінші жағынан біртекті дененің барлық нүктелерінің температурасын бірдей шамаға Δu көтеруге кеткен жылу мөлшері $Q = cm\Delta u = c\rho V\Delta u$ тең. Мұндағы c – меншікті жылу сыйымдылық, m – дененің массасы, ρ – дененің тығыздығы, V – көлемі.

Егер өзекшенің әртүрлі бөліктеріндегі температураның өзгерісі әртүрлі шамаға тең болса, онда оған берілген жылу мөлшері төмендегі формуламен есептеледі:

$$Q = c\rho S \int_{x_1}^{x_2} \Delta u dx.$$

$(t, t + \Delta t)$ уақыт аралығында өзекшенің элементіндегі температуралық балансты есептеу арқылы жылу өткізгіштіктің теңдеуін аламыз. Сонымен, абсциссаны оған перпендикуляр x және $x + \Delta x$ нүктелерінде қиып, осы аралықта жатқан өзекшенің элементін қарастырып, энергияның сақталу заңын пайдалансақ, төмендегі теңдік шығады:

$$kS \int_t^{t+\Delta t} \left[\frac{\partial u(x+\Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] dt = c\rho S \int_x^{x+\Delta x} [u(x, t+\Delta t) - u(x, t)] dx. \quad (1)$$

Алынған өрнек жылу өткізгіштік теңдеуінің интегралдық түрі болып табылады. Теңдеудің дифференциалдық түрін алу үшін $u(x, t)$ функциясының x бойынша үздіксіз екі рет, ал t бойынша бір рет туындысы бар деп алайық. Орталау туралы теореманы пайдаланып (1) теңдігінің екі жағын S -қа қысқартсақ, мына теңдеу шығады:

$$k \left[\frac{\partial u(x+\Delta x, t+\theta_1 \Delta t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t+\theta_2 \Delta t)}{\partial x} \right] \Delta t = c\rho [u(x+\theta_3 \Delta x, t+\Delta t) - u(x+\theta_4 \Delta x, t)] \Delta x.$$

$0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$ Лагранж функциясын пайдалансақ,

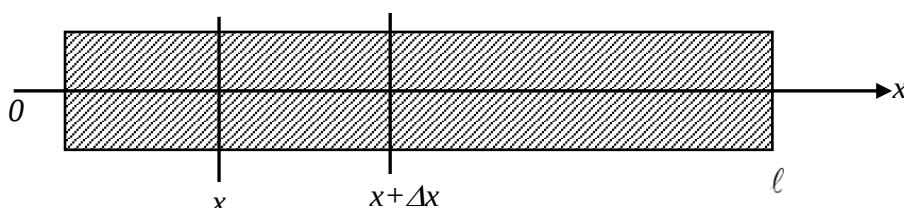
$$\frac{\partial u(x+\Delta x, t+\theta_1 \Delta t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t+\theta_2 \Delta t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u(x+\theta_3 \Delta x, t+\theta_1 \Delta t)}{\partial x^2} \Delta x;$$

$0 < \theta_3 < 1$ ескерсек,

$$u(x+\theta_4 \Delta x, t+\Delta t) - u(x+\theta_4 \Delta x, t) = \frac{\partial u(x+\theta_4 \Delta x, t+\theta_4 \Delta t)}{\partial t} \Delta t$$

$0 < \theta_4 < 1$. Олай болса,

$$k \frac{\partial^2 u(x+\theta_3 \Delta x, t+\theta_1 \Delta t)}{\partial x^2} \Delta t \Delta x = c\rho \frac{\partial u(x+\theta_4 \Delta x, t+\theta_4 \Delta t)}{\partial t} \Delta t \Delta x.$$



Сурет 1 – Жіңішке өзекше үшін жылуөткізгіштік теңдеуін қорытып шығаруға арналған сызба

Теңдіктің екі жағын $\Delta x \Delta t$ қысқартып, $\Delta t \rightarrow 0$ шегіне көшсек, жылу өткізгіштік теңдеуі шығады[2]:

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c\rho \frac{\partial u}{\partial t}$$

немесе

$$a^2 = \frac{k}{c\rho}$$

деп белгілесек, теңдеу былай түрленеді

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2)$$

мұндағы a^2 – температура өткізгіштік коэффициенті.

Физикалық процесіне сәйкес келетін өзекшедегі температураның үлестірілу заңдылығын табу үшін оған қосымша бастапқы және шеттік шарттар берілуі тиіс. Бастапқы шарт $t = 0$ уақыттағы өзекшедегі $u(x, t)$ температураның үлестірілуін береді:

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < \ell.$$

Дербес жағдайда, яғни өзекшенің ұштарының температуралары берілген тұрақты температурада ұсталғандағы шеттік шарт мынадай болады:

$$u(0, t) = u_0, \quad u(\ell, t) = u_t,$$

мұндағы u_0 және u_t қандай да бір тұрақтылар $u_0 = 0$ және $u_t = 0$ деп алуға болады.

Шындығында, егер u_0 және u_t нөлден ерекше болса, онда u функциясынан жаңа $v(x, t)$ функциясына өту керек. Формула бойынша:

$$v(x, t) = u(x, t) - u_0 - \frac{u_t - u_0}{\ell} x,$$

онда

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

v функциясы u функциясы қанағаттандыратын теңдеуді қанағаттандырады:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

$x = 0$ болғанда,

$$v(0, t) = u(0, t) - u_0 = u_0 - u_0 = 0,$$

$x = \ell$ болғанда,

$$v(\ell, t) = u(\ell, t) - u_0 - \frac{u_t - u_0}{\ell} \ell = u_t - u_0 - u_t + u_0 = 0.$$

Олай болса, (2) теңдеуін бастапқы және шеттік шарттарда шешкен жеткілікті.

Егер қарастырылып отырған процесте жылудың таралуы өте ұзын өзекшеде өтеді деп қарастырсақ, өзекшенің орта бөлігіндегі температура оның бастапқы үлестірілуінен анықталады. Осыған ұқсас есептерде өзекше шексіз ұзын деп алынып мына теңдеудің шешімі ізделінеді[3]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (3)$$

Бастапқы шартты

$$u(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (4)$$

(3) және (4) теңдеулері жылу өткізгіштік теңдеу үшін Коши есебі деп аталады.

(3) теңдеуі басқа да физикалық есептерді шешкенде шығады. Мысалы, егер орта газбен бірқалыпты емес толтырылса, онда концентрациясы жоғары жерден концентрациясы төменгі жерге қарай диффузия процесі өтеді. Бұл құбылыс, егер ерітілген заттың концентрациясы көлемде бірқалыпты болмаса, ерітінділерде де байқалады.

1. Айнымалыларды бөлу әдісін қолданып, ұзындығы шектеулі өзекшеде жылудың таралуы туралы есепті шешіңіз[4]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 10 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 4, \quad t > 0.$$

Есептің бастапқы және шеттік шарттары мынадай:

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 2 \text{ болғанда,} \\ 4 - x, & 2 < x \leq 4 \text{ болғанда} \end{cases}$$

$$u(0, t) = u(4, t) = 0.$$

Шешімі. Жоғарыда көрсеткендей:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot e^{-\left(\frac{an\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{\ell},$$

мұндағы: $a^2 = 10$, $\ell = 4$,

$$C_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(z) \sin \frac{n\pi z}{\ell} dz = \frac{1}{2} \int_0^4 f(z) \sin \frac{n\pi z}{4} dz.$$

Бастапқы шарттарды ескеріп C_n есептейік:

$$C_n = \frac{1}{2} \int_0^2 z \sin \frac{n\pi z}{4} dz + \frac{1}{2} \int_2^4 (4-z) \sin \frac{n\pi z}{4} dz.$$

Әрбір интегралды бөліктеп интегралдайық:

$$\begin{aligned} \int_0^2 z \sin \frac{n\pi z}{4} dz &= -\frac{4z}{n\pi} \cos \frac{n\pi z}{4} \Big|_0^2 + \frac{4}{n\pi} \int_0^2 \cos \frac{n\pi z}{4} dz = \\ &= -\frac{8}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{16}{(n\pi)^2} \sin \frac{n\pi z}{4} \Big|_0^2 = -\frac{8}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{16}{(n\pi)^2} \sin \frac{n\pi}{2}; \\ \int_2^4 (4-z) \sin \frac{n\pi z}{4} dz &= -\frac{(4-z)z}{n\pi} \cos \frac{n\pi z}{4} \Big|_2^4 = \frac{4}{n\pi} \int_2^4 \cos \frac{n\pi z}{4} dz = \\ &= \frac{8}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{16}{(n\pi)^2} \sin \frac{n\pi z}{4} \Big|_2^4 = \frac{8}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{16}{(n\pi)^2} \sin \frac{n\pi}{2}. \end{aligned}$$

$\sin n\pi = 0$ болғандықтан, $C_n = \frac{16}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}$ немесе төмендегі теңдік шығады:

$$u(x, t) = \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \cdot e^{-\frac{5}{8} n^2 \pi^2 t} \sin \frac{n\pi x}{4}.$$

2. Айнымалыларды бөлу әдісін қолданып, ұзындығы шектеулі өзекшеде жылудың таралуы туралы есепті шешіңіздер[5]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 81 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 3.$$

Есептің бастапқы және шеттік шарттары төменде келтірілгендей:

$$u(x, 0) = f(x) = \sin \pi x$$

$$u(0, t) = u(3, t) = 0.$$

Шешімі. Жоғарыда көрсетілгендей:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{\ell},$$

мұндағы: $a = 9$, $\ell = 3$,

$$C_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(z) \sin \frac{n\pi z}{\ell} dz = \frac{2}{3} \int_0^3 \sin z \sin \frac{n\pi z}{3} dz =$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^3 \left[-\cos\left(\frac{n+3}{3}nz\right) + \cos\frac{n-3}{3}nz \right] dz.$$

Егер $n = 3$ болса,

$$C_3 = \frac{1}{3} \int_0^3 [-\cos 2\pi z + 1] dz = \frac{1}{3} \left[-\frac{1}{2\pi} \sin 2\pi z + z \right]_0^3 = 1.$$

Бұл жағдайда $C_3 = 1$ коэффициентінен басқа C_n коэффициенттері нөлге теңеледі:

$$u(x, t) = e^{81\pi^2 t} \sin \pi x.$$

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функций, -М.: Наука, 1984. –186 с.
2. Будаков Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник заданий по математической физике.- М.: Изд-во МГУ, 2004. – 126 с.
3. Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. ТР - М.: Высшая школа 1983-175 с.
4. Годунов С.К. Уравнения математической физики.-М.: Наука, 1971.-416с.
5. Сборник задач по курсу высшей математики. Под ред. Г.И. Кручковича -М.: Высшая школа 1973-576 с.

DOI 10.24412/3007-8946-2025-31-35-38

ӘОЖ 517.382(076)

БІР ҚАЛЫПТЫ ЖИНАҚТЫЛЫҚТЫҢ ШАРТЫ ЖӘНЕ ЖЕТКІЛІКТІ БЕЛГІЛЕРІ

АҢШЫБАЕВА КҮНАЙЫМ ҚАНАТБЕКҚЫЗЫ

М. Әуезов атындағы ОҚУ жаратылыстану ғылымдары және педагогикасы жоғары
мектебінің магистранты

Аңдатпа. Есеп арқылы оқыту әдісі өте ертеден белгілі болған. Ежелгі грек философы Сократ оқыту барысында есептің шешімі арқылы қорытынды жасауға болатындай есептер жиынтығын пайдаланған. Оқушылардың даму мүмкіндігі тек өзіндік жұмыстың барысында ғана қалыптасады деген пікір көптеген белгілі педагогтардың ойларынан шыққан. А.Дистервег оқушылар ұғымды өз бетімен есептерді шығару барысында ашу керек деген. Жаңа теориялық білім алуға мүмкіндік беретін практикалық есептерді шығару пайдалы. Практикалық есептер оқушылардың теориялық мағлұматтарға қызығушылығын, зейінін ерекше аударады. Ұсынылған есептердің шешуін іздестіруге көңілі ауады, есептердің шешімдерін қорытындылайды, жаңа теориялық білім алады, теориялық тұжырым жасайды. Міне, осылайша формальды, жаттанды білім алу жойылады.

Кілттік сөздер. Параметр, функция, бір қалыпты жинақтылық, интеграл, меншікті, аргумент, жиын, аралық, төртбұрыш, ақырлы, ақырсыз.

Функцияның өзінің шегіне бір қалыпты ұмтылуының жалпы критерийін пайдаланып оны зерттеліп отырған жағдайын ыңғайлап былай айтуға болады. Интеграл Y облысында у-ке қатысты бір қалыпты жинақты болу үшін берілген кез-келген $\varepsilon > 0$ санына сәйкес у-ке тәуелсіз A_0 саны табылып, тек $A' > A > A_0$ болысымен

$$\left| \int_a^{A'} f(x, y) dx - \int_a^A f(x, y) dx \right| = \left| \int_A^{A'} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

теңсіздіктің Y облыстың барлық у-тері үшін бірден орындалуы қажетті және жеткілікті. Енді интегралдың практикада бір қалыпты жинақтылығын тағайындайтын кейбір белгілерді көрсетейік.

$f(x, y)$ функциясы x бойынша $x \geq a$ үшін үздіксіз деп ұйғарамыз. Егер $[a, \infty]$ шектеусіз аралықта интегралданатын тек тәуелді $\varphi(x)$ функциясы бар болып Y облысындағы у-тің барлық мәндерінде

$$|f(x, y)| \leq \varphi(x) \quad (x \geq a)$$

теңсіздік орындалса, онда интеграл у-ке қатысты бір қалыпты жинақты болады. Егер жаңа ғана дәлелденген критерийді ескерсек, онда бұл нәтиже тікелей мына

$$\left| \int_A^{A'} f(x, y) dx \right| \leq \int_A^{A'} |f(x, y)| dx \leq \int_A^{A'} \varphi(x) dx$$

теңсіздіктен шығады.

Көрсетілген шарттар орындалғанда $f(x, y)$ функциясының $\varphi(x)$ интегралданатын можарантасы бар дейді.

Мысал. 1) Мына[1]

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{k^2 + x^2} dx \quad k \neq 0$$

интеграл a параметріне қатысты бір қалыпты жинақты, себебі бұл интеграл a параметр енбейтін жинақты

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{k^2 + x^2}$$

интегралмен мажоранттанады.

Екі функцияның көбейтіндісінен алынған

$$\int_a^{\infty} f(x, y)g(x)dx, \quad \int_a^{\infty} f(x)g(x, y)dx$$

интегралдарды қарастырайық. Бұлардың тек біреуіне ғана кейбір Y облысынан өзгеретін y параметрі еніп отыр. Осы интегралдардың бір қалыпты жинақтылығының белгілерін ұқсас түрде тұжырымдайық.

f және g функцияларын біз сондағыдай x -тің үздіксіз функциялары деп, ал g функциясын, оның үстіне x бойынша үздіксіз туындысы бар монотонды функция деп есептейміз. Сонда меншіксіз интеграл Y облысында y -ке қатысты бір қалыпты жинақты болады егер:

$$1) \quad \Phi(A, y) = \int_a^A f(x, y)dx$$

интегралы барлық A және барлық y -те бір қалыпты шектелген болса [2]

$$|\Phi(A, y)| \leq K \quad (K = \text{const});$$

$$2) \quad x \rightarrow \infty \text{ жағдайында } g(x) \rightarrow 0 \text{ болса}$$

Дәл осында меншіксіз интегралы y -ке қатысты бір қалыпты жинақты болды, егер:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx$$

жинақты болса, ал $g(x, y)$ функциясы барлық x және барлық y -терде бір қалыпты шектелген болса:

$$|g(x, y)| \leq L \quad (L = \text{const}).$$

Мұның дәлелдемесі негізінен бұрынғы күйінде қалады, өйткені K және L тұрақтыларының y -ке тәуелсіз болуы себепті.

$$\int_A^{A'} fgdx$$

интегралының да y -ке тәуелсіз түрде өрнектеледі және сонымен бір қалыпты жинақтылық қамтамасыз етіледі.

Мысалдар. 2)

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{k^2 + x^2} dx$$

Расында $f(x, a) = \sin ax$ деп алып,

$$\left| \int_0^A \sin ax dx \right| = \frac{1 - \cos aA}{a} \leq \frac{2}{a_0} = K;$$

теңсіздікті табамыз. Екінші жағынан,

$$g(x) = \frac{x}{k^2 + x^2}$$

функциясы монотонды кеми отырып (кемінде жеткілікті үлкен x -терде) $x \rightarrow \infty$ жағдайда 0-ге ұмтылады[3].

3) Мына

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx$$

Мұнда $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ функциясы 0 -ден ∞ -ке дейінгі аралықта интегралданатын функция да және монотонды кемімелі $g(x, a) = e^{-ax}$ функциясы бір санымен шектелген [4].

Шектері шектеулі болған интегралдар жағдайы

Енді $[a, b]$ шектеулі аралықтағы x -тің мәндерінде және кейбір U облысындағы y -тің мәндерінде анықталған $f(x, y)$ функциясын қарастырайық. $y = \text{const}$ болғанда функция x бойынша a -дан b -ге дейін интегралданатын болсын (меншікті мағынада, не меншіксіз мағынада). Сонда

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad (1)$$

интегралы меншікті және меншіксіз болса да $\eta \rightarrow 0$ жағдайдағы

$$\varphi(\eta, y) = \int_a^{b-\eta} f(x, y) dx \quad (2)$$

интегралдың шегі болады.

Егер осы интегралдың $\eta \rightarrow 0$ жағдайдағы өзінің $I(y)$ шегіне ұмтылуы U облысындағы y -тің мәндерінде y -ке қатысты бір қалыпты болса, онда (1) интегралды көрсетілген облыста y -ке қатысты бір қалыпты жинақты деп айтады.

Мұны былай түсіну керек: кез келген $\varepsilon > 0$ санына y -ке тәуелсіз $\delta > 0$ саны табылып, тек $\eta \leq \delta$ болысымен

$$\left| \int_a^b f(x, y) dx - \int_a^{b-\eta} f(x, y) dx \right| = \left| \int_{b-\eta}^b f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

теңсіздік U облысындағы y -тің барлық мәндерін де бірден орындалатын болады.

Бұл жерде бір қалыпты жинақтылық үшін қажетті және жеткілікті шартты айту және осы жағдайға жеткілікті белгілерді лайықтап айту қиын емес.

Біз a -дан b -ге дейін алынған (1) интегралды a -дан $b-\eta$ -ге дейін алынған (2) интегралдың шегі ретінде қарастырдық және соңғы интегралдың өзінің шегіне жақындау сипатына назар аудардық. Сөйтіп, мұнда $x = b$ нүктесі ерекше рөл атқарады. Аралықтың екінші шеткі нүктесіне де осыған ұқсас рөл беру керек болу мүмкін. Мысалы, сол (1) интегралдың $\eta \rightarrow 0$ жағдайда

$$\varphi(\eta, y) = \int_{a+\eta}^b f(x, y) dx$$

интегралдың шегі деп қарастыруға болады. Егер соңғы интеграл $\eta \rightarrow 0$ жағдайда y -ке қатысты өзінің шегіне бір қалыпты ұмтылатын болса, онда (1) интегралды бір қалыпты жинақты дейді. Жоғарғыда айтылғаның барлығы да осы жағдайға да дұрыс.

Егер қай жағдайдағы бір қалыпты жинақтылық сөз болып отырғаны неғайбіл болса, онда $x = \infty$ болғанда, $x = b$ болғанда, $x = 0$ болғанда т.с.с. интегралдың бір қалыпты жинақты деп айтады. $x = b$ нүктесі (1) интегралдың y -тің белгілі мәндерінде ерекше нүктесі болған жағдайда біз $x = b$ болғандағы (1) интегралдың бір қалыпты жинақтылығына назар аударатынымызды ескертеміз. Егер (1) интеграл барлық мәндерде меншікті болып шықса,

онда бұл анықтама формальды түрде ғана дұрыс болып, осы жағдайда да нақты пайдалы болатындығын ілгеріде көреміз .

Мысалы,

$$\int_0^1 \frac{y}{x^2 + y^2} dx$$

интегралы $[0, d]$ аралықтағы y -тің әрбір мәнінде меншікті интеграл ретінде бар болады. Сөйтсе де y – тің өзгерісінің көрсетілген аралығында интегралдың жинақтылығы $x=0$ болғанда бір қалыпты болмайды. Расында, егер тек $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$ болса[5],

$$\int_0^{\eta} \frac{y}{x^2 + y^2} dx = \arctg \frac{\eta}{y} < \varepsilon$$

Теңсіздікті $y > 0$ барлық мәндерінде бірден қанағаттандыруға болмайды: қаншалықты аз етіп алынса да, теңсіздіктің сол жақ бөлігі, $y \rightarrow 0$ жағдайда $\frac{\pi}{2}$ –ге ұмтылады және y -тің жеткілікті аз мәндерінде ε – нен үлкен болатын болар.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

- 1 Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – 4-е изд. – М.: Наука, 1972.
- 2 Орынбасаров М., Сахаев Ш. Математикалық физика теңдеулерінің есептері мен жаттығулар жинағы: Оқу құралы. – Алматы: Қазақ университеті, 2003. – 190 б.
- 3 Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного: Задачи и примеры с подробными решениями: Учебное пособие. Изд. 3-е, испр. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 208 с.
- 4 Василего И.П. Вычисление интегралов с помощью вычетов: Методические указания. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2004. – 20 с.
- 5 Корпусов М.О. Методы теории разрушения решений нелинейных уравнений математической физики. – М.: Физический факультет МГУ, 2014. – 364 с.

DOI 10.24412/3007-8946-2025-31-39-43
ЭОЖ 514.752.4

БЕТТІҢ ЖАНАМА ЖАЗЫҚТЫҒЫ

АЛИМБАЙ АЛЕМ АЛИМБАЙҰЛЫ

М. Әуезов атындағы ОҚУ жаратылыстану ғылымдары және педагогикасы жоғары
мектебінің магистранты

Аңдатпа. XVIII – ғасырда пайда болған ғылым ретіндегі дифференциалдық геометрияның алғашқы анықтамасы, геометрияның кеңістіктік формалар мен қатынастар ғылымы, атап айтқанда кескіндер және олардың өзара түрлендірулері жөніндегі ғылым ретіндегі бастапқы анықтамасымен байланысты. Бет геометриялық негізгі ұғымдардың бірі. Геометрияның әртүрлі бөлімдерінде әр қилы мағына беріледі. «Бет» ұғымы тек түсіндіріледі. Мысалы, бет дененің шекарасы немесе қозғалатын сызықтың ізі деп те түсіндіріледі. Евклидтің «Негіздер» деп аталатын еңбегінде «бет – ұзындығы мен ені болатын нәрсе» делінген.

Кілттік сөздер. Бет, жанама жазықтық, геометриялық ұғым, сфералық бет, цилиндрлік бет, жазықтық, қисық сызықты координаталар.

Элементар геометрияда беттің жалпы анықтамасы берілмейді, тек оның бірнеше дербес түрлері қарастырылады. Мысалы, сфералық бет, цилиндрлік бет, конустық бет, жазықтықтар мен көпжақтар. Дифференциалдық геометрияда қисық сызықты координаталарды (u және v) пайдаланғанда, бет координаталары

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$$

теңдеулерін қанағаттандыратын нүктелердің геометриялық орны ретінде қарастырылады. Жазықтықты деформациялау (қысу, созу, майыстыру) арқылы шығаруға болатын беттерді қарапайым беттер дейді. Егер бетті әрбір нүктесінің жақын аймағында қарапайым бет деп қарастыруға болса, ондай бетті дұрыс бет дейді. $F(x, y, z) = 0$

теңдеуімен анықталатын бет дұрыс болу үшін оның әрбір нүктесінде $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$

туындылары бар болу және олардың кемінде бірі нөлден өзгеше болу керек. Бұл айтылғандардың бәрі 3 өлшемді кеңістіктегі беттерге жатады. Бірақ беттерді кез келген n өлшемді кеңістікте де анықтауға болады. Сондай – ақ беттерді ешбір кеңістікке орналастырмай, олардың өздерінің ішкі қасиеттері бойынша зерттеуге де болады. Аналитикалық геометрияда бет деп нүктелерінің декарт координаталары

$$F(x, y, z) = 0$$

теңдеуін қанағаттандыратын геометриялық орын айтылған. $F(x, y, z)$ функциясының дифференциалдануы жөнінде сөз қозғалмағандықтан мұндай анықтама дифференциалдық геометрияда жарамсыз. Мұндай кемшілікті түзеу үшін дифференциалдық геометриялық зерттеулерге ыңғайлы бет ұғымының анықтамасын енгіземіз. Әдеттегідей локальдық анықтамадан бастаймыз[1].

Анықтама. Φ – нүктелер жиыны, ал D – байламды жазық облысы болсын. Егер Φ және D нүктелері арасында өзара бірімәнді сәйкестік орнығып, бұл сәйкестік ең болмағанда бір координаталық жүйеде жеткілікті рет дифференциалданатын екі аргументті бір функциямен берілетін болса, Φ нүктелер жиынын беттің қарапайым бөлігі дейміз.

Егер D жазық облысы жатқан жазықтық ретінде xOy жазықтығы алынса, анықтамада айтылған сәйкестік

$$z = f(x, y) \quad (1)$$

теңдеуімен беріледі, мұндағы f аталған облыста дифференциалданатын функция. Сонымен (1) теңдеуі беттің қарапайым бөлігінің теңдеуі болып табылады. Енді жеткілікті рет дифференциалданатын қос аргументті

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) \quad (2)$$

вектор – функция келбетін қарастырайық. Бұл функцияның берілуі - $\vec{r}$ векторының координаталары болып келетін

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v) \quad (3)$$

скаляр функцияларының берілуіне мәндес. Анализден

$$x = x(u, v), y = y(u, v),$$

теңдеулерін u, v - ға қатысты шешу үшін u және v - ның берілген мәндерінде

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$$

якобианының нөлден өзгеше болуы жеткілікті екені белгілі. Егер u, v - ның берілген мәндерін

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{D(x, z)}{D(u, v)} = \frac{D(y, z)}{D(u, v)}$$

якобиандарының ең болмаса біреуі нөлден өзгеше болса, онда (3) – тен алынған сәйкес теңдеулерді u, v - ға қатысты шешіп (мәселен $u = u(x, y), v = v(x, y)$) және бұл шешімдерді қалған үшінші теңдеуге қойсақ, (1) түріндегі теңдеуге келеміз (мәселен $z = z(u(x, y), v(x, y))$).

$$\vec{r}_u(u, v) = x_{ui} + y_{uj} + z_{uk},$$

$$\vec{r}_v(u, v) = x_{vi} + y_{vj} + z_{vk}$$

болғандықтан, шартымыз

$$\begin{pmatrix} x_u y_u z_u \\ x_v y_v z_v \end{pmatrix} \quad (4)$$

матрица рангісінің екіге тең болуымен парапар, немесе

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0 \quad (5)$$

болуында.

Сонымен $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0$ болатын кез келген u, v қос мәнінің кейбір аймағында (2) вектор – функция келбеті беттің қарапайым бөлігі болып табылады.

Анықтама. Бет деп жеткілікті рет дифференциалданатын қос аргументті $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ вектор – функция келбетін атайды. $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0$ шартын қанағаттандыратын нүктелерді беттің жәй нүктелері, ал $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = 0$ шартын қанағаттандыратын нүктені беттің ерекше нүктесі дейді[2].

Сонымен беттің кез келген жәй нүктесінің кейбір аймағы қарапайым бөлек болып келеді. Төменде $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ теңдеуін пайдаланып мұндай нүктеде әрқашан беттің жалғыз жанама жазықтығы болатындығы анықталады.

Ерекше нүктелерге келетін болсақ, олардың маңайындағы беттің зерттелуі назарымыздан тыс қалатын арнайы мәселеге айналды. Тек айта кететін жәйт: кейбір жағдайда

$\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0$ теңдігімен анықталатын ерекше нүктелер геометриялық тұрғыда жәй нүктелерден ешбір өзгешелігі болмайды, өйткені болуы мүмкін.

Айталық, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ сферасын $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ теңдеуімен беретін болсақ, мұнда

$$x = \cos u \cos v, y = \cos u \sin v \quad (6)$$

онда $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \Big|_{u=\frac{\pi}{2}} = 0$ болғандықтан, $(0,0,1)$ нүктесі ерекше нүкте болып келеді. Егер де сол сфераның өзін

$$x = \sin u, y = \cos u \sin v, z = \cos u \cos v$$

теңдеулерімен берсек, онда аталған $(0,0,1)$ нүктесі жәй нүктеге айналады, өйткені $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \Big|_{u=v=0} = \vec{k} \neq 0$.

Енді

$$F(x, y, z) = 0 \quad (7)$$

теңдеуін қанағаттандыратын нүктелер жиынынан алынған кейбір $M(x_0, y_0, z_0)$ нүктесінің аймағы қандай шарт орындалғанда қарапайым бөлек болып табылады. Мұнда F жеткілікті рет дифференциалданатын функция.

Анализден M нүктесінде $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ болса, онда (7) теңдеуі z - ке қатысты шешілетіні, демек сол нүктенің маңайын шешімі $z = f(x, y)$ түрінде жазылатыны белгілі. Атап айтқанда (7) теңдеуінің M нүктесінің аймағында қарапайым бөлікті анықтауы үшін M нүктесінде есептелген $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ туындыларының бірі нөлден өзгеше болуы немесе

$$\text{grad} F = \frac{\partial F}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{k} \neq 0$$

болуы жеткілікті[3].

Φ - бет, $P \in \Phi$ нүкте, α — P нүктеден өтетін жазықтық болсын, Φ бетте P -ға жақын Q нүкте алып оның P нүкте және α жазықтығына дейінгі арақашықтығын сәйкес d және δ - нен белгілейміз

$Q \rightarrow P$ да $\frac{d}{\delta^2} \rightarrow 0$ болса, α жазықтық Φ беттің P нүктесіндегі жанама жазықтығы деп аталады.

Ескерту. Жанама жазықтықтың басқа анықтамасы, яғни P нүктеден өтетін және Φ бетте жататын қисықтардың P нүктедегі барлық жанамаларының бірігуі деп аталатын анықтамасыда бар. Бұл жерде бізге бірінші анықтама қолайлы.

Теорема: Φ сыдырғы бет әр бір нүктесінде жанама жазықтыққа ие. Егер $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ оның теңдеуі болса, $P \in \Phi$ нүктедегі жанама жазықтық $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ векторларға параллель болады.

Дәлелдеу: Ұйғарайық Φ бет $P(u, v)$ нүктеде α жанама жазықтығына ие болсын. $\vec{n} - \alpha$ жазықтығына перпендикуляр болған вектор болсын. $\vec{\theta}(u + \Delta u, v + \Delta v)$ нүктеден $P(u, v)$ нүктеге дейінгі арақашықтық α -ға тең болып, α жазықтығына дейінгі арақашықтық

$$|(\vec{r}(u + \Delta u, v + \Delta v) - \vec{r}(u, v)) \cdot \vec{n}| \quad \text{тең.}$$

Онда

$$\frac{\delta}{d} = \frac{|(\vec{r}(u + \Delta u, v + \Delta v) - \vec{r}(u, v)) \cdot \vec{n}|}{|(\vec{r}(u + \Delta u, v + \Delta v) - \vec{r}(u, v))|}$$

Анықтамадан $\Delta u, \Delta v \rightarrow 0$ да $\frac{\delta}{d} \rightarrow 0$. Дербес жағдайда $\Delta v = 0$ десек,

$$\frac{|(\vec{\tau}(u+\Delta u, v+\Delta v) - \vec{\tau}(u, v)) \cdot \vec{n}|}{|(\vec{\tau}(u+\Delta u, v+\Delta v) - \vec{\tau}(u, v))|} \rightarrow 0 \quad (\Delta u \rightarrow 0)$$

Бірақ

$$\frac{|(\vec{\tau}(u+\Delta u, v+\Delta v) - \vec{\tau}(u, v)) \cdot \vec{n}|}{|(\vec{\tau}(u+\Delta u, v+\Delta v) - \vec{\tau}(u, v))|} = \left| \frac{\frac{\vec{\tau}(u+\Delta u, v+\Delta v) - \vec{\tau}(u, v)}{\Delta u} \cdot \vec{n}}{\frac{\vec{\tau}(u+\Delta u, v+\Delta v) - \vec{\tau}(u, v)}{\Delta u}} \right| \rightarrow \frac{|\vec{\tau}_u(u, v) \cdot \vec{n}|}{|\vec{\tau}_u(u, v)|}$$

Сондықтан, $\vec{\tau}_u(u, v) \cdot \vec{n} = 0$. $\vec{\tau}_u(u, v) \neq 0$ болғандықтан $(\vec{\tau}_u \times \vec{\tau}_v \neq 0)$ $\vec{\tau}_u \cdot \vec{n} = 0$ теңдік $\vec{\tau}_u \parallel \alpha$ болғанда орындалады. Дәл осылай $\vec{\tau}_v \parallel \alpha$ екендігі дәлелденеді.

Енді жанама жазықтық теңдеулерін шығарайық.

$$\Phi : x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v) \quad (8)$$

теңдеулерімен берілген болсын. Ұйғарайық параметрдің (u_0, v_0) мәніне беттің $P \in \Phi$ нүктесі сәйкес келсін, яғни $P(x_0, y_0, z_0)$. $M(x, y, z)$ - Φ беттің кез-келген нүктесі болсын. Онда $\overrightarrow{PM}$, $\vec{\tau}_u, \vec{\tau}_v$ векторлары коллинеар, сондықтан олардың аралас көбейтіндісі нөлге тең. Бұл

көбейтіндінің координата формада жазылуы

$$\begin{vmatrix} x - x(u_0, v_0) & y - y(u_0, v_0) & z - z(u_0, v_0) \\ x_u(u_0, v_0) & y_u(u_0, v_0) & z_u(u_0, v_0) \\ x_v(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) & z_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0$$

Бұл соңғы теңдеу жанама жазықтық теңдеуі. Егер $\Phi : Z = f(x, y)$ теңдеуімен берілсе

$$x = u, y = v, z = f(u, v) \quad (9)$$

алмастыруынан кейін жанама жазықтық теңдеуі

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - f(x_0, y_0) \\ 1 & 0 & f_x(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & f_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0$$

немесе

$$z - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

болады.

Егер бет $\Phi: \varphi(x, y, z) = 0$ айқындалмаған теңдеуімен берілсе, Φ беттің $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$ (10)

теңдеулеріндегі x, y, z тердің мәндерін айқындалмаған теңдеуге қосайық $\varphi(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = 0$ тепе-теңдігін аламыз. Бұл тепе – теңдікті u және v айнымалылар бойынша дифференциалдасақ

$$\begin{cases} \varphi_x x_u + \varphi_y y_u + \varphi_z z_u = 0 \\ \varphi_x x_v + \varphi_y y_v + \varphi_z z_v = 0 \end{cases}$$

Бұл теңдіктерден $\{\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z\}$ вектор $\vec{\tau}_u, \vec{\tau}_v$ векторларына перпендикуляр екендігі келіп шығады, яғни жанама жазықтығына перпендикуляр екендігі келіп шығады. Онда жанама жазықтық теңдеуін жазу қиынға соқпайды:

$$(x - x_0)\varphi_x(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)\varphi_y(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)\varphi_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

Р нүктесіндегі жанама жазықтығына перпендикуляр түзу беттің Р нүктесіндегі нормалы деп аталады.

Айқын τ_u х τ_v вектор нормалдың бағыттаушы векторы деп болады, сондықтан оның теңдеуін жазу қиын емес[4].

Мысал Мына теңдеумен берілген беттің берілген нүктеден өтетін жанама жазықтығын табайық.

$$1. x = u + v, y = u - v, z = uv; M(u = 2, v = 1)$$

(8) түрінде болғандықтан

$$\begin{aligned} x_u(u_0, v_0) &= 1, y_u(u_0, v_0) = 1, z_u(u_0, v_0) = v \\ x_v(u_0, v_0) &= 1, y_v(u_0, v_0) = -1, z_v(u_0, v_0) = u \\ x(u_0, v_0) &= 3, y(u_0, v_0) = 1, z(u_0, v_0) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-2 \\ 1 & 1 & v \\ 1 & -1 & u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3x - y - 2z - 4$$

$$3x - y - 2z - 4 = 0$$

$$2. z = x^3 + y^3; M(1, 2, 9)$$

(8) түрінде болғандықтан

$$\begin{aligned} f_x(x_0, y_0) &= 3x^2 = 3, \\ f_y(x_0, y_0) &= 3y^2 = 3 * 4 = 12, \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-9 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 12 \end{vmatrix} = 3x + 12y - z - 18$$

$$3x + 12y - z - 18 = 0$$

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. - М., «Наука», 1964.-214с.
2. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии, Изд.МГУ, 1980.-187с.
3. Норден А.П. Теория поверхностей. М., ГИТТЛ, 1956. -198с.
4. Мусин А.Т. Векторлық және тензорлық есептеуге кіріспе, Қарағанда, 2007.-2016.

DOI 10.24412/3007-8946-2025-31-44-48

ӘОЖ 530.1 (075.8)

ӨЛШЕМІ ШЕКТІ ШЕКТІҢ ТОЛҚЫНДЫҚ ТЕҢДЕУІНІҢ ШЕШІМІ

АБИЛПИЯ БАГДАТ АҚЫЛБАЙҰЛЫ

М. Әуезов атындағы ОҚУ жаратылыстану ғылымдары және педагогикасы жоғары
мектебінің магистранты

Аңдатпа. Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер есептеу математикасындағы ең күрделі және сонымен бірге қызықты есептердің бірі болып табылады. Бұл теңдеулер оларды шешудің біртұтас әмбебап алгоритмінің жоқтығымен сипатталады, ал есептердің көпшілігінде өзіндік ерекше тәсіл қажет. Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер әртүрлі физикалық құбылыстарды сипаттайды және оларды ең күрделі құбылыстар мен процестерді сәтті модельдеу үшін пайдалануға болады (диффузия, гидродинамика, кванттық механика, экология және т. с. с.). Есептерді құрастыруға әртүрлі айнымалыларға қатысты белгісіз функцияның туындылары (немесе дербес туындылар), сондай-ақ есептеу аймағының шекараларындағы шекаралық шарттардың белгілі бір саны бар теңдеудің өзі (немесе теңдеулер жүйесі) кіреді.

Кілттік сөздер. Тербеліс, ішек, Фурье әдісі, дербес шешім, бір өлшемді толқындық теңдеу, Коши есебі, Штурм-Луивиль есебі, тербеліс.

Ұштары бекітілген $0 < x < \ell$ ішектің тербелісін қарастырайық. Бұл есепті шешу үшін бастапқы және шеттік шарттарды қанағаттандыратын бір өлшемді толқындық теңдеудің шешімдерін іздестіреміз[1]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad (0 < x < \ell, \quad t > 0). \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 < x < \ell. \quad (2)$$

Шеттік шарттар:

$$u(0, t) = 0, \quad u(\ell, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

(1) - (3) есептерін шешу үшін негізгі идеялары төмендегідей Фурье әдісін қолданамыз.

(1) теңдеуі сызықтық және біртекті болғандықтан, оның дербес шешімдерінің қосындысы да қарастырып отырған теңдеудің шешімі болып табылады. Көптеген дербес шешімдерді тауып, оларды қандай да бір коэффициенттерімен қосу арқылы (1)-(3) есептерінің ізделіп отырған шешімдерін табуға әрекет жасалынады. Дербес шешімдерді табу мақсатында қосымша көмекші есеп құрастырамыз. (3) шеттік шарты қанағаттандыратын (1) теңдеуінің нөлге тең емес шешімдерін табу үшін оны көбейтінді $X(x) \cdot T(t)$ ретінде қарастырайық. Мұндағы $X(x)$ тек x -айнымалысының функциясы, ал $T(t)$ тек t - айнымалысының функциясы. $X(x) \cdot T(t)$ көбейтіндісін (1) теңдеуіне қойсақ, мына теңдік шығады:

$$XT'' = a^2 TX'' \text{ немесе } a^2 TX \text{ бөлсек,} \\ \frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} \quad (4)$$

теңдеуін аламыз.

$X(x) \cdot T(t)$ функциясы (1) теңдеуінің шешімі болу үшін (4) теңдігі $0 < x < \ell$ және $t > 0$ барлық мәндерінде қанағаттануы қажет. (4) теңдігінің оң жағы x -айнымалысының, ал сол жағы t - айнымалысының функциясы.

$0 < x < \ell$ және $t > 0$ барлық мәндеріндегі (4) теңдігі $\frac{X''}{X}$ және $\frac{1}{a^2} \frac{T''}{T}$ бірдей тұрақты λ -ға тең болғанда орындалады. Қарастырып отырған жағдайда (4) теңдеу екі теңдеуге жіктеледі:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (5)$$

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0. \quad (6)$$

(3) шеттік шарты мынаны береді:

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0, \quad u(\ell, t) = X(\ell)T(t) = 0.$$

Бұдан $X(x)$ функциясы төмендегідей қосымша шартты қанағаттандыру керектігі шығады:

$$X(0) = X(\ell) = 0. \quad (7)$$

Басқа жағдайда біз $T(t) = 0$ теңдігін алған болар едік.

(7) шеттік шарттарын қанағаттандыратын (5) теңдеуінің нөлге тең емес шешімдері бар болғандағы λ параметрінің мәндерін (5) - (7) есептерінің меншікті мәндері, ал оған сәйкес келетін $X(x)$ функциясын меншікті функция деп атайды. Меншікті функцияны және меншікті мәндерді табу есебі Штурм-Лиувилля есебі деп аталады. Штурм-Лиувилля есебінің меншікті функциялары мен меншікті мәндерін табу үшін $\lambda > 0$, $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ жағдайларын қарастыру қажет[2].

1. $\lambda > 0$ болғанда, (5) теңдеуінің жалпы шешімі мына түрде жазылады:

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda x} + C_2 \sin \sqrt{\lambda x}.$$

Ал (7) шекаралық шарты төмендегі теңдіктерді береді:

$$X(0) = C_1 = 0; \quad X(\ell) = C_2 \sin \sqrt{\lambda \ell} = 0.$$

Егер $X(x) \neq 0$ болса, $C_2 \neq 0$, яғни

$$\sin \sqrt{\lambda \ell} = 0 \text{ немесе}$$

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8)$$

$\lambda = \lambda_n$ меншікті мәндеріне сәйкес келетін меншікті функциялар ерекше алынған көбейткіш дәлдігімен анықталады. Оны бірге тең деп алсақ, мына өрнек шығады:

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

2. $\lambda \leq 0$ болғанда, меншікті мәндердің жоқ екендігіне оңай көз жеткізуге болады. Шындығында $\lambda = 0$ болғанда (5) теңдеуінің жалпы шешімі мынадай болады:

$$X(x) = C_1 + C_2 x.$$

(7) шекаралық шартты ескерсек,

$$C_1 + C_2 \cdot 0 = 0, \quad C_1 + C_2 \ell = 0 \text{ теңдігін аламыз.}$$

Бұдан $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, олай болса, $X(x) \equiv 0$.

3. $\lambda < 0$ болғанда (5) теңдеуінің жалпы шешімі мынадай:

$$X(x) = C_1 \cdot e^{\sqrt{-\lambda} x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda} x}.$$

Шекаралық шарттарды ескерсек, төмендегі теңдіктер шығады:

$$\left. \begin{aligned} C_1 + C_2 &= 0, \\ C_1 \cdot e^{\sqrt{-\lambda} x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda} x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

(10) жүйесінің анықтауышын есептейік:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda\ell}} & e^{-\sqrt{-\lambda\ell}} \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{-\lambda\ell}} - e^{\sqrt{-\lambda\ell}} = e^{-\sqrt{-\lambda\ell}} \left[1 - \left(e^{\sqrt{-\lambda\ell}} \right)^2 \right] \neq 0.$$

(10) жүйесінің шешімі тек $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ болады, оларға $X(x) \equiv 0$ сәйкес келеді.

$\lambda = \lambda_n$ (6) теңдеуіне қойсақ, осы теңдеудің жалпы шешімін табамыз:

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi at}{\ell} + B_n \sin \frac{n\pi at}{\ell}.$$

Мұндағы A_n және B_n еркінше алынған тұрақтылар. Сонымен, қосымша көмекші есептің шешімі алынды.

Біртекті шеттік (3) шарттарды қанағаттандыратын және көбейтінді ретінде қарастырылатын $X(x) \cdot T(t)$ (1) теңдеуінің шешімі нөлге тең емес

$$u_n(x, t) = X_n(x) \cdot T_n(t) = \left(A_n \cos \frac{n\pi at}{\ell} + B_n \sin \frac{n\pi at}{\ell} \right) \sin \frac{n\pi x}{\ell}.$$

(1) - (3) есептерінің жалпылама шешімдерін төмендегідей түрде іздестіреміз:

$$u_n(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi at}{\ell} + B_n \sin \frac{n\pi at}{\ell} \right) \sin \frac{n\pi x}{\ell}. \quad (11)$$

A_n және B_n тұрақтыларын бастапқы шартты (2) қанағаттандыратындай етіп таңдап аламыз:

$$u|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} = \varphi(x);$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi a}{\ell} \cdot \sin \frac{n\pi x}{\ell} = \psi(x).$$

Келтірілген формулалардан $\varphi(x)$ және $\psi(x)$ функцияларын $(0, \ell)$ аралығында синустар бойынша Фурье қатарына жіктелгендігін көреміз.

Олай болса,

$$A_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(z) \sin \frac{n\pi z}{\ell} dz,$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^{\ell} \psi(z) \sin \frac{n\pi z}{\ell} dz. \quad (12)$$

Алынған өрнекті (11) формулаға қойып, (1) теңдеуінің шекаралық және бастапқы (2) шарттарды қанағаттандыратындығын аламыз. (12) формуласымен анықталатын (11) қатардың A_n және B_n коэффициенттерімен қосындысы екі рет үздіксіз дифференциалданатын (1) - (3) есептерінің шешімі болатындығы төмендегі шарттар орындалса, дәлелденеді[3].

1. $\varphi(x)$ функциясының үшінші ретке дейін үздіксіз туындысы бар және

$$\varphi(0) = \varphi''(0), \quad \varphi(\ell) = \varphi''(\ell) = 0.$$

2. $\psi(x)$ функциясының екінші ретке дейін үздіксіз туындысы бар және

$$\psi(0) = \psi(\ell) = 0.$$

Алынған шешімге физикалық интерпретация жасайық. Ол үшін $u_n(x, t)$ функциясын мына түрде жазамыз:

$$u_n(x, t) = \left(A_n \cos \frac{n\pi at}{\ell} + B_n \sin \frac{n\pi at}{\ell} \right) \sin \frac{n\pi x}{\ell} = \alpha_n \cos \frac{n\pi a}{\ell} (t + \delta_n) \sin \frac{n\pi x}{\ell},$$

мұндағы $\alpha_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$; $\frac{n\pi a}{\ell} \delta_n = -\arctg \frac{B_n}{A_n}$, яғни ішектің әрбір x_0 нүктесі гармониялық тербелісте болады:

$$u_n(x_0, t) = \alpha_n \cos \frac{n\pi a}{\ell} (t + \delta_n) \sin \frac{n\pi x_0}{\ell}.$$

Мұндағы $\alpha_n \sin \frac{n\pi x_0}{\ell}$ – тербелістің амплитудасы. Ішектің осы заңдылыққа бағынатын қозғалысын тұрғын толқын деп атайды.

Нүктелері $x = m \frac{\ell}{n}$ ($m = 1, 2, \dots, n-1$) $\sin \frac{n\pi x}{\ell} = 0$ болғанда, барлық процестерде тыныштық күйін сақтаса, оны тұрғын $u_n(x, t)$ толқындардың түйіні деп атайды.

$\sin \frac{n\pi x}{\ell} = \pm 1$ болғанда, $x = \frac{2m+2}{2n} \ell$ ($m = 0, 1, \dots, n-1$) нүктелері амплитудалары максимал (α_n) тербеліс жасайтын болса, оны тұрғын толқындардың шоғырлары деп атайды. Тұрғын толқынның кез келген уақыттағы пішіні синусоида болады:

$$u_n(x, t) = C_n(t) \sin \frac{n\pi x}{\ell},$$

$$\text{мұндағы: } C_n(t) = \alpha_n \cos \omega_n (t + \delta_n), \omega_n = \frac{n\pi a}{\ell}.$$

t уақыт моментінде $\cos \omega_n (t + \delta_n) = \pm 1$ болғанда, ауытқу максимал мәнге ие болады, ал қозғалыс жылдамдығы нөлге тең.

t уақыт моментінде $\cos \omega_n (t + \delta_n) = 0$ болғанда, ауытқу нөлге тең, ал қозғалыс жылдамдығы максимал. Ішектің барлық нүктелерінің тербеліс жиіліктері бірдей

$$\omega_n = \frac{n\pi a}{\ell} = \frac{n\pi}{\ell} \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}. \text{ Бұл тербеліс ішек тербелісінің меншікті жиілігі деп аталады[4].}$$

Ішектің тербелісін біз дыбыс арқылы қабылдаймыз. Тербелістің ауада таралу және оны құлағымыздың қабылдау процесіне тоқталсақ, ішектің дыбысын тұрғын толқындарға сәйкес келетін «жай үндердің» қосындысы деп айтуға болады. Дыбыстың жай үндерге жіктелуі тек математикалық мінездемесі бар операцияға ғана жатпайды. Жай үндерді шығару резонатордың көмегімен тәжірибе жасау арқылы іске асырылады. Үннің биіктігі тербеліс жиілігіне байланысты. Ал күші оның энергиясымен, яғни амплитудасымен анықталады. Ішек

шығаратын ең төменгі үн, ең төменгі меншікті жиілікпен анықталып, $\omega_1 = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$ оның негізгі үні деп аталады.

Қалған ω_1 еселі үндер обертоңдар деп аталады. Дыбыс тембрі обертоңның негізгі үні мен энергияның гармоникалар бойынша үлестіруіне тәуелді. Ішектің төменгі тоны және тембрі оны туғызу әдісіне байланысты. Шындығында тербелісті туғызу әдісі бастапқы шартты анықтайды:

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x).$$

Ал олар арқылы A_n және B_n коэффициенттері өрнектеледі. Егер $A_1 = B_1 = 0$ болса, онда төменгі үнге ω_n жиілігі сәйкес келеді. Мұндағы $n - A_n$ немесе нөлден ерекше болғандағы ең аз сан. Әдетте ішек бірдей үн шығарады. Шын мәнінде ішекті тартып, бастапқы жылдамдықсыз жіберу арқылы тербеліс жасауға мәжбүр етеміз. Бұл жағдайда

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi(x) > 0 \text{ және } A_1 = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(z) \sin \frac{\pi z}{\ell} dz > 0;$$

$0 < z < \ell$ аралығында $\sin \frac{\pi z}{\ell} > 0$. $\sin \frac{\pi z}{\ell}$ функциясының $n \geq 2$ болғанда, таңбасы айнымалы болғандықтан, келесі коэффициент A_n -ден көп кіші болады. Жеке жағдайда, егер $\varphi(x)$ кескіннің ортасымен салыстырғанда симметриялы болса, $A_2 = 0$ тең. Сонымен, егер ішекті бір жаққа тарту арқылы тербеліске келтірсек, оның төменгі үні негізгі үн болып табылады. Негізгі үннің энергиясы басқа гармониялық тербелістер энергиясынан үлкен. Ішекті басқа әдістермен тербеліске келтіруге болады. Мысалы, егер $\varphi(x)$ функциясы ішектің ортасымен салыстырғанда тақ болса, $A_1 = 0$ тең. Төменгі үн мына жиілікке сәйкес келеді[5]:

$$\omega = \omega_2 = \frac{2\pi}{\ell} \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}.$$

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Бижігітов Т. Математикалық физика әдістері: Оқулық. / Т. Бижігітов – Алматы: ЖШС РПБК «Дәуір», 2012. – 296 б.
2. Бугров Я.С., Никольский С.Н. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды функции комплексного переменного. Т.3 М., «Наука», 2012.-129с.
3. Смирнов А.Ф. Краткий курс математического анализа. Издательство наука. 2014.-126с.
4. Аксененко Е.М. Применение дифференциальных уравнений к решению задач: практикум / Е.М. Аксененко, Г.М. Чуванова. - Южно-Сахалинск, изд-во СахГУ, 2013. - 52с.
5. Боровских А.В., Перов А.И. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - Москва - Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2014.- 540 с.

DOI 10.24412/3007-8946-2025-31-49-53

ЭОЖ: 51-7

ГЕОМЕТРИЯНЫ ОҚЫТУДА ДӘЛЕЛДЕУГЕ АРНАЛҒАН ЕСЕПТЕРДІҢ АЛАТЫН ОРНЫ

НҰРАШ ҮМІТАЙ

Магистрант, 1 курс, «Математика» мамандығы
Абай атындағы Қазақ Ұлттық Педагогикалық университеті

Ғылыми жетекші: **АРДАБАЕВА АЛМАГУЛЬ КАИРБАЕВНА**, PhD
Алматы қ., Қазақстан

***Аңдатпа.** Геометрияны оқытуда дәлелдеуге арналған есептердің маңызы зор, себебі олар оқушылардың логикалық ойлау қабілеттерін дамытуға және математикалық дүниетанымын қалыптастыруға көмектеседі. Бұл мақалада дәлелдеуге арналған есептердің геометрия пәнінде алатын орнын, олардың оқу процесіндегі рөлін және оқушыларға ғылыми тұрғыдан ойлау дағдыларын үйретудегі тиімділігін талқылаймыз. Дәлелдеулер арқылы оқушылар геометриялық принциптерді тереңірек түсініп, өз білімдерін практикалық тұрғыда қолдануға мүмкіндік алады. Мақалада әртүрлі геометриялық есептер мен олардың шешімдері ұсынылып, осы әдістің оқушылардың математика пәніне деген қызығушылығын арттырудағы ықпалы қарастырылады.*

***Кілт сөздер:** геометрия, дәлелдеу, математикалық сауаттылық, логикалық ойлау, оқыту әдістемесі, дәлелдеме әдістері, аксиоматика*

Геометрия оқу пәні ретінде геометриялық есептерді дәлелдеу дағдыларын қалыптастыруға бағытталған әдістемелік функцияны орындайды. Геометрияны оқыту барысында дәлелдеуге арналған есептердің алатын орны ерекше, себебі олар оқушылардың логикалық ойлау дағдыларын қалыптастыруда маңызды рөл атқарады. Дәлелдеу тек білімді бекітумен шектелмейді, ол оқушылардың ойлау жүйесін тереңдетіп, олардың ғылыми тұрғыдан ойлау қабілеттерін дамытады. Қабілеттерін жетілдіруге болады:

- Математикалық білімді тереңдету: Дәлелдеу мен пайымдау процесі оқушыларды математикалық теория мен ұғымдардың тереңіне бойлауға мүмкіндік береді. Бұл оларға математикалық мәселелерді шешуде әртүрлі әдістер мен тәсілдерді қолдануға дағдыландырады. Теориялық білімдер тек абстрактілі деңгейде емес, практикалық тұрғыда да пайдалы болуы үшін дәлелдеме арқылы түсіндіріледі;

- Логикалық ойлау дағдыларын дамыту: Дәлелдеу барысында оқушылар логика заңдары мен ережелерін игеріп, олардың нақты мәселелерді шешудегі рөлін түсінеді. Мұнда оқушылар тек дәлелдерді дұрыс құрып қана қоймай, сондай-ақ кері және тура теоремаларды, қажетті және жеткілікті шарттарды ажырата білу, сөйлемдерді әртүрлі формада тұжырымдау сияқты дағдыларды меңгереді;

- Аналитикалық және синтетикалық пайымдауларды қолдану: Дәлелдеу әдісі оқушыларды аналитикалық (мәселені бөлек бөліктерге талдау) және синтетикалық (бөліктерді біріктіру) ойлау тәсілдерін қолдануға үйретеді. Бұл қабілеттер оларға тек математикалық мәселелерде ғана емес, басқа да пәндер мен өмірлік жағдайларда тиімді шешімдер қабылдауға мүмкіндік береді

- Дедуктивті ойлау қабілетін дамыту: Математикадағы дәлелдеу үдерісі оқушыларға дедукцияның (жалпы ережелер мен заңдарды нақты жағдайларда қолдану) мәнін түсінуге көмектеседі. Бұл ғылыми тұрғыдан ойлау мен дәлелді пікір айтуға деген қабілеттілікке жол ашады, себебі дедуктивті дәлелдеу мәселелерді шеше отырып, логикалық құрылымды қалыптастырады.

Негізгі мектеп курсындағы геометрияны оқыту оқушының интеллектуалды дамуында, ойлау қабілетін арттыруда, қоғамдық өмірде өз орнын таба білуде үлкен рөл атқарады. Математикалық ұғымдарды игеру, дәлелдеуді үйрену, пайымдау – оқушының математика пәнін толық меңгеруінде жетекші рөл атқаратын факторлар. Көптеген әдіскерлер және мұғалімдер (А.Д. Александров, А.А. Ефимчик, М.Г. Мехтиев, Т.Ф. Фролова және т. б.) логикалық және қарапайым дәлелдеу есептері оқушылар үшін қиындық тудыратын мәселе екенін айтып өтті. Себебі, жүйелі геометрия курсын оқуды бастаған кезде теореманы дәлелдеудің қажеттілігін толық түсіну қиынға соғады. Соның салдарынан дәлелдеудің қорытындысы нақты бола бермейді [1].

Оқушыларды дәлелдеуге үйрету жемісті болуы үшін олар қажетті теориялық білім жүйесін (ұғымдар және олардың анықтамалары, аксиомалар, теоремалар) толықтай дерлік меңгерген және негізгі салуларды орындай алу біліктіліктері қалыптасқан болуы қажетті. Сонымен қатар оқушыларды біртіндеп мақсатты түрде талдау, синтез, абстракциялау, жалпылау және т.с.с. жалпы ақыл-ой іс-әрекеттеріне үйреу керек.

Геометриядағы дәлелдеуге берілген есептердің мынадай мақсаттары бар:

- 1) негізгі теориялық білімді нақтылап бекіту;
- 2) өз бетінше жұмысты дамыту әдеттері;
- 3) оқушылардың ойлау қабілетін дамыту;
- 4) алға қойған мақсатқа жету үшін еркіндік пен шыдамдылыққа тәрбиелеу;
- 5) өткен материалды қайталау.

Кез келген есепті шығару - сол есепті талдаудан басталады. Талдау кезінде есептің қорытындысының орындалуына жеткілікті шарттар ізделінеді.

Геометриялық фигуралардың кейбір қасиеттері теориялық бөлімде теоремалар, сондай-ақ, жаттығулар бөлімінде дәлелдеуге арналған есептер түрінде беріледі. Олар геометриялық білім мазмұнының негізін құрайды.

Теоремаларды дәлелдеуде және есептерді шығаруда оқушылардың көпшілігі қиындықтарға кездеседі де оларды түсінбей жаттап алады, оның себебінің бірі – шартының айқын болмауы және дәлелдеменің абстрактылығы болып табылады.

Сондықтан да оқушыларды дәлелдеудің әр түрлі әдіс-тәсілдерімен (аксиоматикалық, көрнекілік, алгебралық, кестелік, тура, кері жору) таныстырудың да маңызы өте ерекше.

Мектептегі геометрияны оқыту тәжірибесінде теоремаларды дәлелдеуді келесідей төрт кезеңге бөліп жүргізудің тиімді екенін айқындадық.

1-кезең. Теореманы дәлелдеудің негізгі идеясы баяндалып, қажет болған жағдайда салу орындалады.

2-кезең. Оқушылармен белсенді түрде теореманың мазмұны мен оны дәлелдеуге талдама жасалады.

3-кезең. Теореманы дәлелдеудің әр қадамы анықталып, оны жүзеге асыру орындалады. Дәлелдеменің қысқаша символикамен жазылуы беріледі.

4-кезең. Символикалық жазылумен дәлелдемені мұғалімнің өзі не жақсы оқитын бір оқушы ауызша баяндайды, басқа оқушылар ұқыпты түрде тыңдап, жазып отырады. Мұғалімдердің көпшілігі теореманы дәлелдеудің бастапқы екі кезеңін ескерместен қалдырып отырады да, дәлелдеуді оқулықтағы тек синтетикалық жолмен сөзбе сөз жүргізеді. Нәтижесінде теореманың дәлелдемесін неден бастау керек екендігі, қандай аксиомаға, анықтамаға немесе бұрын дәлелденген теоремаға сүйенетіндігі ашылмай қалады. Осыдан оқушылардың ойлау қабілетін, белсенділігін, өздігінен іздену мен іс-әрекетін қалыптастыру процесі баяу болады [2].

Мектеп геометрия курсының құрылымын былайша сипаттауға болады:

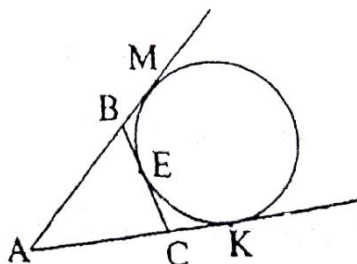
- 1) негізгі геометриялық ұғымдар аталып өтеді, олар анықтамасыз енгізіледі;
- 2) енгізілген ұғымдар негізінде барлық қалған геометриялық ұғымдарға анықтамалар беріледі;
- 3) аксиомалар тұжырымдалады;

4) аксиомалар мен анықтамалар негізінде теоремалар дәлелденеді, өз кезегінде олар геометрия курсының басқа теоремаларын дәлелдеуге пайдаланылады. Осылардың бәрінің орындалуын ескере отырып, құрылған геометрияны аксиоматикалық геометрия деп атайды.

Енді осы әдістеме бойынша теоремаларды дәлелдеуге мысалдар келтірейік. [3].

Мысал-1.(аксиоматикалық әдіс) Шеңбер ABC үшбұрышының BC қабырғасын және AB мен AC қабырғаларының созындысында жанады. A төбесінен шеңбердің AB қабырғасымен жанасу нүктесіне дейінгі арақашықтық ABC үшбұрышының периметрінің жартысына тең екенін дәлелдеу керек.

Дәлелдеуі: ABC үшбұрышында BC қабырғасымен және AB мен AC қабырғаларының созындыларымен шеңбердің жанасу нүктелері сәйкесінше E , M және K болсын (1-сурет).



1-сурет. Жанасу нүктелер

AM мен AK кесінділері A нүктесінен жүргізілген жанама-лардың осы нүктеден жанасу нүктесіне дейінгі қашықтық болғандықтан $AM=AK$. Дәл осылайша $BM=BE$, $CE=CK$

$$AM=AB+BM=AB+BE$$

$$AK=AC+CK=AC+CE,$$

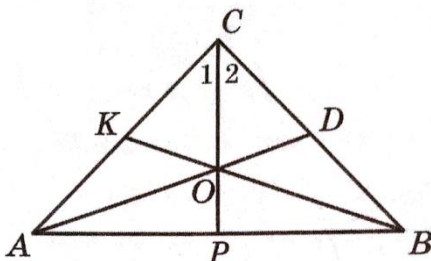
$$AM+AK=2AM.$$

Алдыңғы екі теңдікті пайдаланып,

$$2AM=AB+BE+CE+AC \text{ жазамыз. } CE+BE=BC \text{ болғандықтан } 2AM=AB+BC+AC$$

Олай болса $AM = \frac{AB+BC+AC}{2}$ тең болады. Дәлелдеу керегі шықты.

Мысал – 2.(аксиоматикалық әдіс) Теңбүйірлі ABC үшбұрышының AB қабырғасының іргелес бұрыштарының биссектрисалары O нүктесінде қиылыссын. CO түзуі AB түзуіне перпендикуляр болатынын дәлелдейік.



2-сурет

Дәлелдеуі: Теңбүйірлі ABC үшбұрышында $AC=BC$ болсын. AD мен BK биссектрисалары O – нүктесінде қиылыссын (2 сурет).

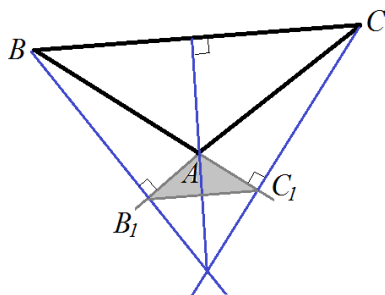
Үшбұрыштардың теңдігінің екінші белгісіне сәйкес $\triangle ABK = \triangle BAD$, демек $AD=BK$. Бұдан $AO=BO$, $OD=OK$.

Екі қабырғасы және олардың арасындағы бұрышы бойынша

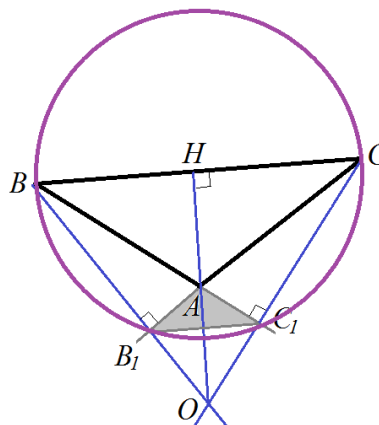
$\triangle BKC = \triangle ADC$. Бұдан $BK=AD$, $BC=AC$, $\angle CBK = \angle CAD$. Демек, $CK=CD$. Бұдан $\triangle OKC = \triangle ODC$, сондықтан $\angle 1 = \angle 2$. Екі қабырғасы және олардың арасындағы бұрышы бойынша $\triangle ACP = \triangle BCP$ ($AC=BC$, CP –ортақ қабырға, $\angle 1 = \angle 2$) тең. Олай болса, $AP=BP$, яғни CP – медиана, сондықтан CP мен AB перпендикуляр. CO кесіндісі CP кесіндісінің бойында жатқандықтан, CO кесіндісі AB -ға перпендикуляр болады. Дәлелдеу керегі осы.

Мысал-3. (аксиоматикалық әдіс) ABC үшбұрышының BAC бұрышы доғал. BB_1 және CC_1 биіктіктері жүргізілген. ABC және B_1AC_1 үшбұрыштарының ұқсас екенін дәлелдеу керек.

Дәлелдеуі: ABC және B_1AC_1 үшбұрыштарының ұқсас екенін дәлелдеу үшін үшбұрыштардың ұқсастық белгілерінің орындалуын көрсету қажет. Үшбұрыштардың ұқсастығының бірінші белгісі бойынша олардың кез келген сәйкес екі бұрышының тең болатынын дәлелдеу жеткілікті (3-сурет). BAC және B_1AC_1 бұрыштары вертикаль болғандықтан олар тең болады. Енді басқа сәйкес екі бұрыштың тең екендігін көрсетеміз.



3-сурет



4-сурет

BB_1C және CC_1B үшбұрыштарын қарастырайық. Олар тікбұрышты, сонымен қатар гипотенузалары BC ортақ. Олай болса, диаметрі BC болатын шеңбер осы үшбұрыштарға сырттай сызылады (4-сурет). Суреттен CBC_1 және CB_1C_1 бұрыштары іштей сызылған, сонымен қатар, CC_1 доғасына тірелетінін көреміз. Шеңбердің бір доғасына тірелетін ішкі бұрыштар өзара тең болады. Демек, $\angle CBC_1 = \angle CB_1C_1$. Олай болса, ABC және B_1AC_1 үшбұрыштары ұқсас болады.

Оқушылар теоремаларды қалай дәлелдеу керектігін білсе де, кейде дәлелдеу есептерінде сол теоремаларды қай жерде және қалай қолдануды анықтауда қиындықтарға тап болады. Бұл мәселені шешу үшін геометрия курсына оқу процесін ертерек бастап, оқушыларға бірнеше қадамнан тұратын қарапайым есептерді, геометриялық тұжырымдарды дәлелдеуге үйрету қажет. Мұндай жаттығулар нәтижесінде оқушылар дәлелдеу үшін қай теореманы немесе қандай қасиеттерді қолдану керектігін, сондай-ақ есептің шартына сәйкес туындайтын түрлі мүмкін жағдайларды анықтауды үйренеді. Дәлелдеу процесінде қосымша сызбаларды қолданудың маңызы да зор. Математикалық тұжырымдарды дәлелдеу және қорытынды жасау арқылы оқушы логикалық ойлау қабілетін дамытып, батыл тұжырымдар жасауға дағдыланады.

Жоғарыда айтылғандарды қорытындылай келе, келесідей тұжырым жасауға болады. Дәлелдеуге үйрету кез-келген техниканы немесе әдісті қолданумен емес, тұтастай оқыту жүйесімен анықталады. Осы орайда жетістікке жету келесідей дағдыларды дамыту деңгейіне байланысты: ұсынылған тапсырманы түсіну, зерттеу, заңдылықтарын айқындау; проблеманы тұжырымдау, түсіну, іс-әрекетті жоспарлау, бақыланатын құбылыстардағы маңыздыларды бөліп көрсету, алынған мәліметтерді интерпретациялау, стандартты емес жағдайларда өлшеулер жасау, т.б

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ:

1. Смирнова С.И. Развитие у учащихся умения рассуждать при обучении математике в 5-6 классах: Автореферат — М.: Петрозаводск, 1999. — 3 с
2. Ардабаева А.К. Білім беру мазмұнын жаңарту жағдайында орта мектепте геометрия курсының оқытудың әдістемелік ерекшеліктері: Диссертация (философия ғылымдарының кандидаты дәрежесін алу үшін) — Алматы, 2023. — 215 б.
3. Рахымбек Д. Мектеп геометрия (планиметрия) курсының оқыту әдістемесі: Оқу құралы. — Алматы: Эверо, 2015. — 320 б.

DOI 10.24412/3007-8946-2025-31-54-57

УДК 372.851

АЛГЕБРА КУРСЫНДА СТАНДАРТТЫ ЕМЕС ЕСЕПТЕРДІ ҚАРАСТЫРУ ТУРАЛЫ

НҰРЛЫБЕКҚЫЗЫ ҒАЗИЗА

Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті

1 курс магистранты, 7M01501 - Математика

Алматы қ., Қазақстан Республикасы

Аңдатпа: Бұл мақалада алгебра курсының оқушылардың математикалық қабілетін, логикалық ойлауын және шығармашылық мүмкіндіктерін дамытудағы маңызы қарастырылады. Стандартты емес есептердің оқушылардың пәнге деген қызығушылығын арттырып, шығармашылық қабілеттерін дамытуға қалай ықпал ететіні нақты мысалдар арқылы көрсетіледі. Сонымен қатар, алгебра курсы оқыту барысында стандартты емес есептерді қолданудың тиімді жолдары ұсынылады.

Кілт сөздер: алгебра, стандартты емес есептер, логикалық ойлау, тәсіл, шығармашылық қабілет.

О НЕСТАНДАРТНЫХ ЗАДАЧАХ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ

Аннотация: В данной статье рассматривается значение курса алгебры в развитии математических способностей, логического мышления и творческих возможностей учащихся. Показано, как нестандартные задачи способствуют повышению интереса к предмету и развитию творческих способностей на конкретных примерах. Кроме того, предлагаются эффективные способы использования нестандартных задач в процессе обучения алгебре.

Ключевые слова: алгебра, нестандартные задачи, логическое мышление, метод, творческие способности.

ON NON-STANDARD PROBLEMS IN THE ALGEBRA COURSE

Annotation: This article examines the importance of the algebra course in developing students' mathematical abilities, logical thinking, and creative potential. It demonstrates how non-standard problems enhance students' interest in the subject and foster their creativity through specific examples. Additionally, effective methods for incorporating non-standard problems into algebra teaching are proposed.

Keywords: algebra, non-standard problem, logical thinking, method, creative ability.

Алгебра курсы – білім алушылардың математикалық ойлауын, логикалық қабілетін және шығармашылық мүмкіндіктерін дамытуға арналған негізгі пәндердің бірі. Алайда, дәстүрлі есептерді шешу көп жағдайда білім алушылардың қызығушылығын төмендетіп, механикалық жаттауға алып келуі мүмкін. Осы тұрғыдан алғанда, стандартты емес есептерді қарастыру білім алушылардың пәнге деген қызығушылығын арттырып қана қоймай, олардың шығармашылық қабілетін дамытудың тиімді тәсілі болып табылады.

Стандартты емес есептер, әдетте, өмірлік жағдайларға негізделген немесе оқушылардан стандартты емес ойлау дағдыларын қажет ететін есептерді қамтиды. Бұл есептерді оқыту үдерісіне енгізу оқушылардың өз бетінше талдау жасап, бірнеше шешім жолын қарастыруына мүмкіндік береді.

Енді, стандартты емес есептер дегеніміз не, соған тоқталайық. А. Е. Әбілқасымова мен Е. А. Тұяқовтың «Жалпы білім беретін мектепте математикалық есептерді шығаруды

ОФ "Международный научно-исследовательский центр "Endless Light in Science"

оқытудың әдістемелік негіздері» еңбегінде стандартты емес есеп деп шығару жолы дайын ережелер мен формулаларға бағынбай, арнайы әдіспен шығарылатын есептерді атайды [1, 18 б.]. Мұндай есептер көбіне нақты алгоритммен емес, әр түрлі тәсілдермен шешіледі.

Ендеше, алгебра пәнін оқытуда стандартты емес есептерді қалай қолдана аламыз? Сабақтың басында қызықты стандартты емес есептерді қарастырып, білім алушылардың назарын аударуға болады.

7-сыныпта қарастырылатын «Бүтін көрсеткішті дәреже» бөлімі бойынша мысалды қарастырсақ.

1-мысал.

Берілгені: $2222^{5555} + 5555^{2222}$ қосындысы 7-ге бөлінеді ма[2, 52 б.]?

Шешуі: Алдымен, 2222 мен 5555-ті 7-ге бөлейік:

$$2222 \div 7 = 317(3 \text{ қалдық})$$

$$5555 \div 7 = 793(4 \text{ қалдық})$$

Бізге $3^{5555} \div 7$ мен $4^{2222} \div 7$ мәндерін табу керек. Осы қалған қалдықтардың дәрежелерін 7-ге бөліп қарайық:

$3^n \div 7$ үшін цикльділік:

1. $3^1 \div 7 = 0(3 \text{ қалдық})$

2. $3^2 \div 7 = 1(2 \text{ қалдық})$

3. $3^3 \div 7 = 3(6 \text{ қалдық})$

4. $3^4 \div 7 = 11(4 \text{ қалдық})$

5. $3^5 \div 7 = 34(5 \text{ қалдық})$

6. $3^6 \div 7 = 104(1 \text{ қалдық})$

7. $3^7 \div 7 = 312(3 \text{ қалдық})$. Бізде әрі қарай қалдықтардың мәні қайталанады. Бұл жерде цикль 6-ға тең болып тұр.

$4^n \div 7$ үшін цикльділік:

1. $4^1 \div 7 = 0(4 \text{ қалдық})$

2. $4^2 \div 7 = 1(2 \text{ қалдық})$

3. $4^3 \div 7 = 9(1 \text{ қалдық})$

4. $4^4 \div 7 = 36(4 \text{ қалдық})$. Мұнда цикль 3 рет қайталанады.

Дәрежелерді сәйкесінше цикльдарға бөлсек:

$5555 \div 6 = 925(5 \text{ қалдық})$ және $2222 \div 3 = 740(2 \text{ қалдық})$. Енді, осы қалған қалдықтарды қосайық: $5+2=7$. $7 \div 7=1$, демек, қосынды 7-ге бөлінеді.

Жауабы: $2222^{5555} + 5555^{2222}$ қосындысы 7-ге бөлінеді.

Осыған ұқсас есептерді сабақтың басында назарды аудартуға немесе сабақтың ортасында бірсарынды есептерден жалыққан кезде сабаққа қызығушылықты оятуға беруге болады. Сонымен қатар, тақырыпқа қатысты стандартты емес есептерді қарастырсақ та болады.

Мысалы, 7-сыныпта «Көпмүше және оған амалдар қолдану» тақырыбына стандартты емес есепті қарастырайық:

2-мысал:

Берілгені: $x + y - z = a - b$

$$x - y + z = b - c$$

$$-x + y + z = c - a.$$

Осы өрнектерді пайдаланып $x + y + z = 0$ екенін дәлелде[3, 44-б.].

Ендеше, осы есепті шығарып көрейік:

Шешуі:

Барлық үш теңдеуді мүшелеп қосамыз:

$$(x + y - z) + (x - y + z) + (-x + y + z) = (a - b) + (b - c) + (c - a)$$

Жақшаны ашып жазғанда:

$$x + y - z + x - y + z - x + y + z = a - b + b - c + c - a \text{ шығады.}$$

Енді осы жерде бірдей мүшелерді қосып, амалдарды орындасак:

$x + y + z = 0$ жауабы шығады.

Жауабы: $x + y + z = 0$

8-сыныпта өтетін «Квадрат теңдеу» тақырыбына стандартты емес есепті шығарып көрсек.

3-мысал:

$x^3 + 5x^2 + 8x$ деген көпмүше берілген. Егер x мәні бірлікке арттырылса, онда көпмүшенің мәні өзгермейтіні белгілі болса, x -тің мәнін табыңыз[3, 84-б.].

Берілгені: $x^3 + 5x^2 + 8x$

Шарты бойынша, $x^3 + 5x^2 + 8x = (x + 1)^3 + 5(x + 1)^2 + 8(x + 1)$. Ендеше осы теңдікті шығарып көрейік.

Шешуі:

Жақшаны ашып шығайық:

$$x^3 + 5x^2 + 8x = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 5x^2 + 10x + 5 + 8x + 8$$

Енді бірдей мүшелерін қосып, амалдарды орындасак:

$$3x^2 + 13x + 14 = 0$$

Бізде осындай квадрат теңдеу шықты, енді оны Виет арқылы шығарып көрсек:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{13}{3} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{14}{3} \end{cases}$$

Іріктеу әдісі арқылы шығарсақ, $x_1 = -\frac{7}{3}$, $x_2 = -2$ екені анық болады.

9-сыныптың «Екі айнымалысы бар сызықтық емес теңдеулер» тақырыбына стандартты емес есепті қарастырайық.

4-мысал:

$2x + 3y - 5 = 0$ көпмүшесі бүтін шешімдер қабылдайды ма?

Берілгені: $2x + 3y - 5 = 0$

Осы теңдеуді стандартты түрде жазайық:

$2x + 3y = 5$. Бұл сызықтық диофанттық теңдеу. Оның бүтін шешімдері болатынын тексеру үшін, ең алдымен, $2x + 3y = 5$ теңдеуінің жалпы шешімін табайық.

Шешуі: Бұл теңдеудің бүтін шешімі болуы үшін 2 мен 3-тің ең үлкен ортақ бөлгішін табайық. $\text{ЕҮОБ}(2,3) = 1$ саны 5-ті бөлетінін көреміз. Себебі 1 саны кез келген санды бөлетіндіктен, теңдеудің бүтін шешімдері бар.

Евклид алгоритмін қолдану арқылы келесі сандарды табамыз:

$$2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = 1$$

Енді екі жақты 5-ке көбейтсек:

$$2 \cdot (2 \cdot 5) + 3 \cdot (-1 \cdot 5) = 5$$

$$2 \cdot 10 + 3 \cdot (-5) = 5$$

Сонымен, $x_0 = 10$, $y_0 = -5$ – нақты бір шешімі.

Жалпы шешімі:

$$x = 10 + 3k, \quad y = -5 - 2k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Мұнда k – кез келген бүтін сан. Осылайша, теңдеудің шексіз көп бүтін шешімдері бар. Мысалы, кейбір шешімдер:

- 1) $k=0$ болса: $(10, -5)$
- 2) $k=1$ болса: $(13, -7)$
- 3) $k=-1$ болса: $(7, -3)$
- 4) $k=2$ болса: $(16, -9)$

Сол кезде $(10, -5)$, $(13, -7)$, $(7, -3)$, $(16, -9)$ және тағы басқа шешімдер шығады.

Осылайша, стандартты емес есептерді қолдану оқушылардың пәнге деген қызығушылығын арттырып, олардың шығармашылық ойлау қабілетін дамытуға ықпал етеді.

Осы,ан байланысты, Л.М. Фридман мен Е.Н. Турецкий «Как научиться решать задачи» атты еңбектерінде стандартты емес есептерді шешу үшін нақты бағдарлама немесе жалпы ережелер мен тәртіптер жоқ екенін атап көрсетеді[4, 45-б.].

Қорытындылай келе, алгебра курсында стандартты емес есептерді қолдану білім алушылардың пәнге деген қызығушылығын арттырып қана қоймай, олардың шығармашылық ойлау қабілетін дамытуға да септігін тигізеді. Мұндай есептерді сабақ барысында қолдану білім алушылардың стандартты емес ойлауын қалыптастырып, математикалық есептерді әртүрлі тәсілдермен шешуге деген ынтасын арттырады. Осылайша, алгебра пәнін оқытуда стандартты емес есептерді қарастыру – білім алушылардың математикалық білімін тереңдетудің, шығармашылық қабілетін дамытудың және олардың пәнге деген қызығушылығын арттырудың тиімді әдісі болып табылады.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

1. Әбілқасымова А. Е., Тұяқов Е. А. Жалпы білім беретін мектепте математикалық есептерді шығаруды оқытудың әдістемелік негіздері. – Алматы, 2019 – 340 б.
2. Нестандартные задачи по математике. Задачи с целыми числами / Е. В. Галкин – Челябинск: Взгляд, 2005 – 272 б.
3. Нестандартные задачи по алгебре / Ф. А. Бартенов. – Москва: Просвещение , 1976 – 95 б.
4. Фридман Л. М., Турецкий Е. Н. Как научиться решать задачи. – М.: Просвещение, 1989. – 192 с.

DOI 10.24412/3007-8946-2025-31-58-61

ӘОЖ373.5:51(07):004

ПЛАНИМЕТРИЯЛЫҚ ЕСЕПТЕРДІ ЦИФРЛЫҚ ТЕХНОЛОГИЯЛАРДЫ ПАЙДАЛАНЫП ШЕШУ

ТОҚТАМЫС ДИНАРА БАУЫРЖАНҚЫЗЫ

Абай атындағы Қазақ Ұлттық педагогикалық университеті,
«Математика, физика және информатика» институтының магистранты

Ғылыми жетекші: **ҚАСҚАТАЕВА БАХЫТКҮЛ РАХЫМЖАНҚЫЗЫ**, п.ғ.д.,
профессор.
Алматы қ., Қазақстан

Аннотация. Бұл мақалада геометрия сабақтарында цифрлық технологияларды қолдану мысалдары қарастырылады. Зерттеудің мақсаты – оқушылардың ойлауын дамыту, геометрияға деген қызығушылығын арттыру, жаңа ұғымдарды есте сақтау қабілетін жақсарту, өзін-өзі оқыту дағдыларын дамыту үшін цифрлық технологияларды пайдалану. Сонымен қатар, цифрлық технологияларды пайдалану оқушылардың кеңістіктік ойлауын дамытып, визуализация дағдыларын жақсартатыны және мұғалімдерге оқыту процесін оңтайландырып, оқушылардың белсенділігін арттыруға мүмкіндік беретіні анықталды. Зерттеу нәтижелері цифрлық технологияларды геометриялық есептерді шешуде тиімді пайдаланудың жолдарын көрсетеді.

Тірек сөздер: планиметрия, цифрлық технологиялар, GeoGebra.

Цифрландыру ғылыми-техникалық прогресті дамытуға байланысты көптеген мәселелерді шеше алатын, тез өзгеретін әлемнің білімді, шығармашылық, белсенді маманын даярлаудың қажетті талабы болып табылады. Цифрлық технологиялар деп мектептің немесе ЖОО-ның оқу процесінде әртүрлі бағдарламаларды, қосымшаларды және басқа да цифрлық ресурстарды пайдалану деп түсінеміз. Оларға, мысалы, мультимедиялық оқулықтар, интерактивті тест жүйелері, компьютерлік тренажерлер, электронды оқулықтар мен оқу құралдары, интернет-ресурстар жатады [1].

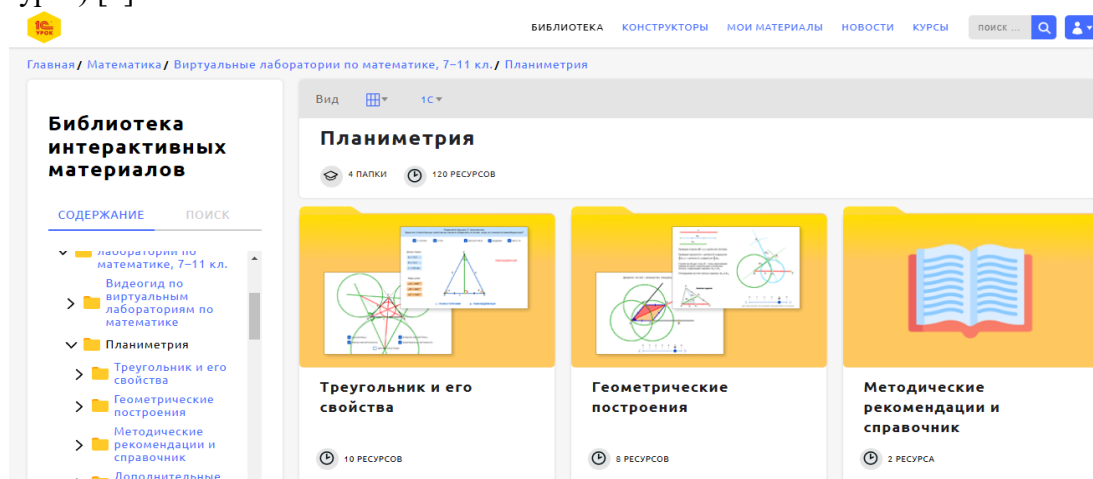
Негізгі мектептегі планиметрия курсын оқытуда оқушылардың тиісті ұғымды нәтижелі қалыптастыру, есептер шығару мен теоремаларды дәлелдеу біліктерін игерту қызметін ақпараттық технология мүмкіндігімен жетілдіру қажеттілігі мен оның іс жүзінде әдістемелік тұрғыдан қамтамасыз етілуі арасында қарама-қайшылық туындайды. Осыған орай, мектепте планиметрия курсын оқыту сапасын жетілдіру үшін ақпараттық технологияны пайдалану жолдарын анықтау осы курсты оқыту әдістемесіндегі көкейкесті мәселе болып табылады [2]. Планиметриялық есептерді шешу процесі – кеңістіктік ойлау дағдыларды қалыптастыратын маңызды компоненттердің бірі. Алайда, дәстүрлі оқыту әдістері кейбір оқушылар үшін күрделі болуы мүмкін, сондықтан цифрлық технологияларды интеграциялау олардың оқу процесіне деген ынтасын арттырып, жеке оқыту траекториясын қалыптастыруға мүмкіндік береді.

Геометрияның мектептегі математикалық білім беруде маңыздылығы жоғары, өйткені геометриялық білім оқушылардың кеңістіктік елестету қабілеттерін қалыптастырып, дамытумен қатар, олардың логикалық ойлау қабілеттерін де дамытады [3]. Сондай-ақ цифрлық технологияларды тиімді қолдану оқушылардың оқу процесіне деген елестету қабілеттерін қалыптастырып қана қоймай қызығушылығын арттырып, олардың шығармашылық ойлау қабілеттерін дамытуға мүмкіндік береді. Сонымен қатар, цифрлық технологиялар мұғалімдерге оқушылардың білімін жекелендіріп бағалауға, олардың қателерін нақты анықтауға және кері байланыс беруге көмектеседі.

7–9-сыныптардағы геометрия курсын оқу барысында оқушылардың бойында жазықтықтағы геометриялық фигуралар туралы білімдері қалыптасып, тереңдетіледі және жүйеленеді; есептеуге, дәлелдеуге және салуға арналған геометриялық есептерді шешу біліктігі мен дағдылары қалыптасады және дамиды; жазықтықтағы түрлендірулер арқылы алынған жазық фигуралардың бейнелерін салу біліктігі қалыптасады және дамиды; логикалық және бейнелік ойлауы дамиды [3]. Бұл фигураларды дәстүрлі сызба құралдарын пайдалана отырып салу оқушылардан белгілі бір техникалық дағдыларды талап етеді және кейбір жағдайларда есептің мазмұнын толықтай түсінуге кедергі келтіруі мүмкін. Ал цифрлық технологиялардың көмегімен геометриялық салуларды автоматтандыру, есептің шешу барысын кезең-кезеңмен көрсету және әртүрлі жағдайларды динамикалық түрде өзгертуге болады. Осылайша, оқушылар тек сызу дағдыларын ғана емес, сонымен қатар кеңістіктік ойлау, логикалық пайымдау және зерттеу қабілеттерін оңтайландырады.

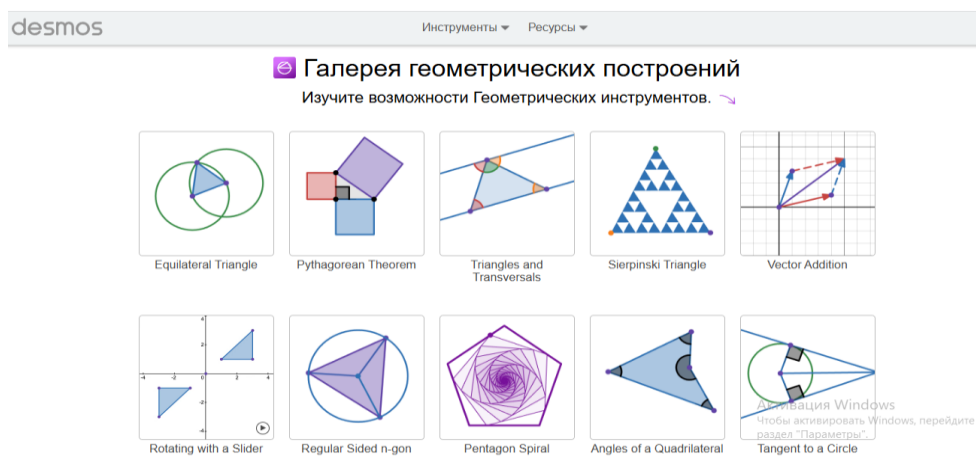
Бұл әдістеменің басты мақсаты цифрлық технологияларды пайдалана отырып, негізгі мектеп оқушыларын планиметриялық есептерді шешуге үйрету болып табылады. Цифрлық технологияларды қолдану оқу материалының көрнекілігін қамтамасыз етіп, есепшығарудағы қиындықтарды жеңуге көмектеседі. Мысалы, 1С:Урок, Desmos Graphing Calculator, GeoGebra сияқты цифрлық технологиялар геометриялық фигураларды визуализациялауға, есеп шарттарын интерактивті түрде көрсетуге және қиын есептердің шешу жолдарын кезең-кезеңімен түсіндіруге мүмкіндік береді. Бұл технологиялар оқушыларға геометриялық теоремаларды графикалық түрде дәлелдеуді, фигуралардың қасиеттерін зерттеуді және есептерді шығармашылық жолмен шешуді үйретеді. Цифрлық технологиялар оқушыларға дербес жұмыс істеу дағдыларын қалыптастыруға көмектеседі. Олар әртүрлі геометриялық салулар мен есептерді жылдам орындауға, нәтижелерін визуалды түрде бақылауға және түсінуге жағдай жасайды.

Мысалы, оқушылар 1С:Урок арқылы оқу материалдарын, оқушылардың өзіндік жұмысына арналған интерактивті көрнекі оқу материалдарын табуға болады, олардың арасынан планиметрия зертханасы, әдістемелік құралдар мен лекцияларды пайдалана отырып планиметриялық есептерді шешуді жүзеге асыру қабілеттерін қалыптастыруға мүмкіндік алады (1-сурет) [4].



1-сурет

Планиметрияда кейбір қасиеттерді тексеру үшін параметрлерді өзгертіп, олардың геометриялық фигураларға қалай әсер ететінін бақылауға Desmos мүмкіндік береді. Desmos мұғалімдер мен оқушыларға планиметриялық есептерді шешуге, геометриялық фигураларды визуализациялауға, динамикалық түрде өзгертіп және теоремаларды дәлелдеуге көмектеседі (2-сурет) [5].

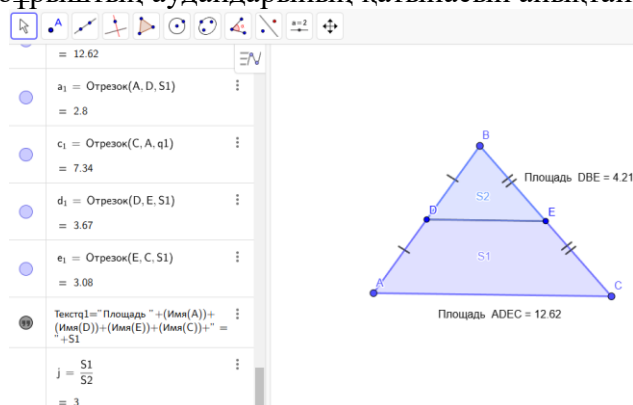


2-сурет

GeoGebra – бұл білім алушылар мен оқытушыларға оқу модульдерін әзірлеу және математикаға елеулі оқыту тәсілдерін ұсынатын геометрияға арналған интерактивті программа. GeoGebra – бұл интерактивті геометриялық жүйе. Нүктелермен, векторлармен, сегменттермен, сызықтармен және қималармен конструкциялар жасай аласыз, сонымен қатар олар кейін динамикалық өзгерген кезде функцияларды жасай аласыз. GeoGebra қолданушы интерфейсі графикалық терезе мен алгебра терезесінен тұрады [6]. GeoGebra оқушылар абстрактілі түсініктерді өз көздерімен көруіне мүмкіндік береді. Әсіресе жаңа тақырыпты түсіндіру барысында тиімді, көрнекі түрде сызбасын салуға болады. Бұл әдіс оқушыларға ерекше қызық болып, формулаларды түсінікті түрде жеткізеді [7].

1-мысал. Үшбұрыштың орта сызығы үшбұрыштың ауданын қандай қатынаста бөледі?

Алдымен бағдарламада кез-келген ABC үшбұрышын салып аламыз. Үшбұрыштың AC және CB қабырғаларының орта нүктелерін қосатын DE-орта сызығын жүргіземіз. ABC үшбұрышы DE-орта сызығы арқылы DBE болатын үшбұрыш пен ADEC болатын трапецияға бөлінді. Сол арқылы үшбұрыштың аудандарының қатынасын анықтаймыз.



3-сурет. Үшбұрыш (GeoGebra бағдарламасы көмегімен салынған)

Сонымен, сабақтарда цифрлық технологияларды пайдалану сапалы білім беруде мұғалімдер үшін ыңғайлы және оқушылар үшін қызықты, жаңа материалды үйренуге және өткенді бекітуге тиімді екенін атап өтейік. Цифрлық технологияларды пайдалану оқушыларды планиметриялық есептерді шешуге үйретудің тиімділігін арттырады. Цифрлық технологиялар білім берудің ажырамас бөлігіне айналып, оқыту процесінің сапасын жаңа деңгейге көтереді.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Мамбетова Н.С., Анисимова Т.И. Использование цифровых ресурсов на уроках геометрии// бщество: социология, психология, педагогика.– Краснодар, 2023. - №8. – Б.136-143.
2. Жайдакбаева Л.К. Негізгі мектепте планиметрия курсын оқытуды ақпараттық технология негізінде жетілдіру әдістемесі: автореф.п.ғ.к.: 13.00.02. – Алматы, 2009. – 26 б.
3. Әбілқасымова А.Е., Ардабаева А.К. Орта мектептегі геометриялық білім беру мазмұнының кейбір аспектілері // ПМУ хабаршысы. Педагогикалық серия.– Павлодар, 2020. - №2. – Б.27-37.
4. Математический конструктор [Электронды ресурс] // ООО «Виртуальная лаборатория», 2002-2019. URL: https://urok.1c.ru/library/mathematics/virtualnye_laboratorii_po_matematike_7_11_kl/planimetriya/ (қолданған күні: 13.03.2024).
5. Desmos. Графикалық калькулятор [Электронды ресурс] // URL: <https://www.desmos.com> (қолданған күні: 13.03.2024).
6. Майбазарова Б.Ж., Баетов Қ.Х. GeoGebra программасы көмегімен кеңістіктегі фигуралардың қимасын салу әдістемесі// Абай атындағы ҚАЗҰПУ-ң хабаршысы. – 2020. - №2. – С. 87-92.
7. GeoGebra. Динамикалық математика бағдарламасы [Электронды ресурс] // URL: <https://www.geogebra.org> (қолданған күні: 13.03.2024).

СОДЕРЖАНИЕ CONTENT

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ **PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

ШАФИЕВА ГЮЛЬШАН ХАЛИК кызы, ГУЛИЕВА АРЗУ МУРАД кызы [БАКУ, АЗЕРБАЙДЖАН] ИЛЛЮСТРАЦИЯ ПРЕИМУЩЕСТВА МЕТОДА ПРОГНОЗА-КОРРЕКЦИИ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ТРАПЕЦИИ.....	3
МАЖИТОВА НАРГИЗА СЕЙТЖАНОВНА, ЕРКИШЕВА Ж. С. [АЛМАТЫ, ҚАЗАҚСТАН] АЛГЕБРА КУРСЫНДА ТЕҢДЕУЛЕР МЕН ТЕҢСІЗДІКТЕРДІ ШЕШУДЕ СТАНДАРТТЫ ЕМЕС ТӘСІЛДЕРДІ ҚОЛДАНУДЫҢ ОҚУШЫЛАРДЫҢ БІЛІМІН ТЕРЕНДЕТУДЕГІ РӨЛІ.....	11
ҚҰРАЛОВА АҚПЕЙІЛ САБИТҚЫЗЫ, АРДАБАЕВА А. К. [АЛМАТЫ, ҚАЗАҚСТАН] ГЕОМЕТРИЯНЫ ОҚЫТУДА ОҚУШЫЛАРДЫҢ БІЛІМІН БАҚЫЛАУ МЕН БАҒАЛАУ МӘСЕЛЕЛЕРІ.....	15
МЫНЖАСОВА МӨЛДІР НУРЛАНҚЫЗЫ, ҚАСҚАТАЕВА Б.Р. [АЛМАТЫ, ҚАЗАҚСТАН] ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР МЕН ТЕҢСІЗДІКТЕРДІ ШЕШУ ӘДІСТЕРІ.....	20
СЕРМУРЗАЕВА ЗУЛФИЯ СУНДЕТОВНА [ҚАЗАҚСТАН] ЕРІКТІ ТЕРБЕЛІСТЕР.....	25
ДӘРІБАЙ ДАНА МҰХТАРҚЫЗЫ [ҚАЗАҚСТАН] ҰЗЫНДЫҒЫ ШЕКТЕУЛІ ӨЗЕКШЕДЕГІ ЖЫЛУДЫҢ ТАРАЛУ ТЕҢДЕУІ.....	30
АҢШЫБАЕВА КҮНАЙЫМ ҚАНАТБЕКҚЫЗЫ [ҚАЗАҚСТАН] БІР ҚАЛЫПТЫ ЖИНАҚТЫЛЫҚТЫҢ ШАРТЫ ЖӘНЕ ЖЕТКІЛІКТІ БЕЛГІЛЕРІ.....	35
АЛИМБАЙ АЛЕМ АЛИМБАЙҰЛЫ [ҚАЗАҚСТАН] БЕТТІҢ ЖАНАМА ЖАЗЫҚТЫҒЫ.....	39
АБИЛПИЯ БАГДАТ АҚЫЛБАЙҰЛЫ [ҚАЗАҚСТАН] ӨЛШЕМІ ШЕКТІ ІШЕКТІҢ ТОЛҚЫНДЫҚ ТЕҢДЕУІНІҢ ШЕШІМІ.....	44
НҰРАШ ҮМІТАЙ, АРДАБАЕВА АЛМАГУЛЬ КАИРБАЕВНА [АЛМАТЫ, ҚАЗАҚСТАН] ГЕОМЕТРИЯНЫ ОҚЫТУДА ДӘЛЕЛДЕУГЕ АРНАЛҒАН ЕСЕПТЕРДІҢ АЛАТЫН ОРНЫ.....	49
НҰРЛЫБЕКҚЫЗЫ ҒАЗИЗА [АЛМАТЫ, ҚАЗАҚСТАН] АЛГЕБРА КУРСЫНДА СТАНДАРТТЫ ЕМЕС ЕСЕПТЕРДІ ҚАРАСТЫРУ ТУРАЛЫ.....	54
ТОҚТАМЫС ДИНАРА БАУЫРЖАНҚЫЗЫ, ҚАСҚАТАЕВА БАХЫТКҮЛ РАХЫМЖАНҚЫЗЫ [АЛМАТЫ, ҚАЗАҚСТАН] ПЛАНИМЕТРИЯЛЫҚ ЕСЕПТЕРДІ ЦИФРЛЫҚ ТЕХНОЛОГИЯЛАРДЫ ПАЙДАЛАНЫП ШЕШУ.....	58

ENDLESS LIGHT IN SCIENCE



Контакт



irc-els@mail.ru

Наш сайт



irc-els.com